Sve

Le riflessioni che portano a una definizione di sve partono dalla nozione di funzione come corrispondenza tra due insiemi.
Per il matematico la scelta del valore della variabile indipendente a cui associare quello della funzione è una libertà associata alla sua presenza, ma tale libertà non è più concessa al fisico che deve attribuire alle cose reali una possibilità di essere trattate mediante funzioni anche quando fisici e matematici non esistono.
Tale libertà originaria delle cose o impossibilità di fissare almeno una variabile reale è la condizione a cui deve sottostare il fisico perché sia possibile una descrizione matematica delle sue osservazioni.
La descrizione del più semplice fenomeno fisico ha quindi bisogno almeno di un piano che associ a ciscun valore di una variabile non prefissabile un altro valore di funzione.
Questo può essere un valore reale, ma è ben noto che i numeri complessi come coppie ordinate di numeri reali hanno almeno tutte le proprietà dei primi, più altre utili alla descrizione fisica.
In altre parole, se un numero reale può occupare un posto nella descrizione della natura, conviene occuparlo con un numero complesso, perché quello reale ne è un caso particolare e questa modifica può anche avere un valore di ricerca.
Così in corrispondenza ad una variabile non prefissabile può essere posta una variabile complessa fatta di una coppia ordinata di valori e poi a ciascuno o ad entrambi gli elementi reali della coppia nuovamente un numero complesso.
Con questa operazione si associa ad uno scalare imprefissabile un vettore.
Bisogna ora passare alla definizione fisica di un tale vettore.
La finitezza della velocità della luce è la causa della fissità del cielo.
Infatti, se si considera una stella, oltre a cause di dinamica classica per cui non può muoversi arbitrariamente nel cielo, anche quando fossero soddisfatte le condizioni classiche di energia e impulso per compiere un ampio angolo rispetto ad altre stelle, non potrebbe raggiungere la velocità della luce.
La stella α-Centauri è a quattro anni-luce da un osservatore terrestre e da un punto di vista cinematico l'elongazione angolare massima in ogni piccola parte dei quattro anni la compie se percorre un arco di cerchio con l'osservatore al centro.
Su tale cerchio la stella in quattro anni non può percorrere un radiante, se non raggiunge la velocità della luce a parte il ritardo con cui l'osservatore può sperimentare il fenomeno.
Poiché una stella della nebulosa di Andromeda è 400000 volte più lontana, l'angolo percorribile da questa in quattro anni è $\frac{1}{400000}$ di radiante uguale a $\frac{57 \cdot 3600}{400000}$ = 0,52 secondi d'arco.
Una deviazione angolare di 0,52 secondi in quattro anni può essere una definizione fisica di campione di direzione di un vettore.
In questo modo i campioni di direzione possono essere tanti quante sono le nebulose extragalattiche e tutti di maggior precisione.
Questi vettori o i loro versori sono di natura completamente diversa dagli scalari imprefissabili della fisica e una coppia ordinata delle due grandezze costituisce la realizzazione fisica del numero complesso della matematica.
Questi versori possono essere scelti in numero finito (generalmente tre) per costruire ogni versore variabile mediante combinazioni lineari con coefficienti variabili appartenenti ad una matrice unitaria.
Attraverso questo procedimento si giunge alla definizione di un fattore di incommensurabilità i a modulo unitario per il vettore v associato allo scalare non prefissabile s.

Si può ora considerare l'analogia formale tra coppie scalare-vettore S = s+iv e i numeri complessi.

Definizione di sve come coppia ordinata di scalare e vettore dotata di fattore di incommensurabilità i con le proprietà di uno scalare tale che sia $i^2 = -1$.

Somma $\quad (s_1,iv_1) + (s_2,iv_2) = (s_1+s_2 , i[v_1+v_2])$

Prodotto $\quad (s_1,iv_1) \cdot (s_2,iv_2) = (s_1s_2 - v_1v_2 , i[s_1v_2 + s_2 v_1])$

Elemento unitario

$(1,i0) \cdot (s_2,iv_2) = (s_2,iv_2)$

$(s_1,iv_1) \cdot (1,i0) = (s_1,iv_1)$

Inverso di $S = (s,iv) \quad S_* = (s_*,iv_*)$

$(ss_* - vv_* , i[sv_* + s_* v]) = (1,i0) \quad ; \quad ss_* - vv_* = 1 \quad ; sv_* + s_* v = 0$

$$v_* = -\frac{s_* v}{s} \quad ; \quad ss_* + v\frac{s_* v}{s} = 1 \quad ; \quad s_* = \frac{s}{s^2 + v^2} \quad ; \quad v_* = -\frac{v}{s^2 + v^2}$$

Associatività

$(s_1,iv_1) \cdot (s_2,iv_2) \cdot (s_3,iv_3) = (s_1s_2 - v_1v_2 , i[s_1v_2 + s_2 v_1]) \cdot (s_3,iv_3)$

$(s_1,iv_1) \cdot (s_2,iv_2) \cdot (s_3,iv_3) = (s_1,iv_1) \cdot (s_2s_3 - v_2v_3 , i[s_2v_3 + s_3 v_2])$

$(s_1s_2 - v_1v_2 , i[s_1v_2 + s_2 v_1]) \cdot (s_3,iv_3) =$

$= (s_1s_2s_3 - v_1v_2s_3 - s_1v_2v_3 - s_2v_1v_3 , i[s_1s_2v_3 - v_1v_2v_3 + s_1v_2s_3 + s_2v_1s_3]) = a$

$(s_1,iv_1) \cdot (s_2s_3 - v_2v_3 , i[s_2v_3 + s_3 v_2]) = \quad ; \quad a = b$

$= (s_1s_2s_3 - s_1v_2v_3 - v_1s_2v_3 - v_1s_3v_2 , i[v_1s_2s_3 - v_1v_2v_3 + s_1s_2v_3 + s_1s_3v_2]) = b$

Si può esprimere il quadrato di (s,iv) come: $S^2 = (s,iv)^2 = (ss-vv,i2sv) = (s_2,iv_2)$.

Poi $\quad S^3 = (s,iv)^3 = (sss-3svv,i[3ssv-vvv]) = (s_3,iv_3)$

I coefficenti delle componenti scalari e vettoriali (in grassetto) di S^n sono dati da:

potenza	coefficienti
(s,iv)	1 i**1**
$(s,iv)^2$	1 i**2** -1
$(s,iv)^3$	1 i**3** -3 -i**1**
$(s,iv)^4$	1 i**4** -6 -i**4** 1
$(s,iv)^5$	1 i**5** -10 -i**10** 5 i**1**
$(s,iv)^6$	1 i**6** -15 -i**20** 15 i**6** -1

$S^{2n} = (s,iv)^{2n} = (s_{2n},iv_{2n})$

$$s_{2n} = \binom{2n}{0}s^{2n} - \binom{2n}{2}s^{2n-2}v^2 + \binom{2n}{4}s^{2n-4}v^4 - \cdots$$

$$\cdots\cdots(-1)^k\binom{2n}{2k}s^{2n-2k}v^{2k}\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-2}s^2v^{2n-2} + (-1)^n\binom{2n}{2n}v^{2n}$$

$$v_{2n} = \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{1}} s^{2n-1} v - \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}} s^{2n-3} v^3 + \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{5}} s^{2n-5} v^5 - \cdots$$

$$\cdots\cdots(-1)^k \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2k-1}} s^{2n-2k+1} v^{2k-1} \cdots\cdots + (-1)^{n-2} \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2n-3}} s^3 v^{2n-3} + (-1)^{n-1} \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2n-1}} s\, v^{2n-1}$$

n=3 $$s_6 = \binom{6}{0} s^6 - \binom{6}{2} s^4 v^2 + \binom{6}{4} s^2 v^4 - v^6 = s^6 - 15 s^4 v^2 + 15 s^2 v^4 - v^6$$

$$v_6 = \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{1}} s^5 v - \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} s^3 v^3 + \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} s\, v^5 = 6 s^5 v - 20 s^3 v^3 + 6 s\, v^5$$

$$S^{2n+1} = (s,iv)^{2n+1} = (s_{2n+1}, iv_{2n+1})$$

$$s_{2n+1} = \binom{2n+1}{0} s^{2n+1} - \binom{2n+1}{2} s^{2n-1} v^2 + \binom{2n+1}{4} s^{2n-3} v^4 - \cdots$$

$$\cdots\cdots(-1)^k \binom{2n+1}{2k} s^{2n+1-2k} v^{2k} \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \binom{2n+1}{2n-2} s^3 v^{2n-2} + (-1)^n \binom{2n+1}{2n} s\, v^{2n}$$

$$v_{2n+1} = \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{1}} s^{2n} v - \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{3}} s^{2n-2} v^3 + \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{5}} s^{2n-4} v^5 - \cdots$$

$$\cdots\cdots(-1)^k \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2k+1}} s^{2n-2k} v^{2k+1} \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2n-1}} s^2 v^{2n-1} + (-1)^n \binom{\mathbf{2n+1}}{\mathbf{2n+1}} v^{2n+1}$$

n=2

$$s_5 = \binom{5}{0} s^5 - \binom{5}{2} s^3 v^2 + \binom{5}{4} s\, v^4 = s^5 - 10 s^3 v^2 + 5 s\, v^4$$

$$v_5 = \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{1}} s^{2n} v - \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} s^2 v^3 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{5}} v^5 = 5 s^4 v - 10 s^2 v^3 + v^5$$

$$s_{2n} = \sum_{0}^{n}{}_{2k} (-1)^k \binom{2n}{2k} s^{2n-2k} v^{2k}$$

$$v_{2n} = \sum_{1}^{n}{}_{2k-1} (-1)^k \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{2k-1}} s^{2n-2k+1} v^{2k-1}$$

$$s_{2n+1} = \sum_{0}^{n}{}_{2k} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} s^{2n-2k+1} v^{2k}$$

$$v_{2n+1} = \sum_{0}^{n}{}_{2k+1} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} s^{2n-2k} v^{2k+1}$$

Formalmente gli sve hanno la struttura di gruppo dei numeri complessi e ne differiscono solo per il fatto che i secondi termini delle coppie ordinate sono costituite da insiemi di numeri reali in cui è definito un prodotto scalare.
In uno spazio ad n dimensioni il vettore v è costituito da un modulo scalare |v| e da n-1 anomalie, e quindi uno sve S si può scrivere nella forma:

$$S = (s,iv) = (s,i(|v|,i(j_1,j_2\cdots j_{n-1}))$$

Il modulo del vettore costituisce lo scalare di un nuovo sve e le anomalie il nuovo relativo vettore e si può porre:

$$|v| = s^*_1 \qquad (j_1,j_2\cdots j_{n-1}) = v^*_1$$

Per sostituzione si ottiene la forma di S:

$$S = (s,iv) = (s,i(s^*_1,iv^*_1)) = (s - v^*_1,is^*_1)$$

in cui v^*_1 accetta di essere ripartito in modulo $|v^*_1|$ (anche unitario)
e successive anomalie $(y_1,y_2\cdots y_{n-2}) = v^*_2$ per ottenere:

$$S = (s,iv) = (s,i(s^*_1,i(s^*_2,iv^*_2))) = (s - s^*_2,i[s^*_1-v^*_2])$$

e ricorsivamente:

$$S = (s,iv) = (s - s^*_2+s^*_4 -s^*_6+\cdots\cdots,i[s^*_1-s^*_3+s^*_5\cdots\cdots])$$