APPENDICE 4

Dalla definizione di nucleo risolvente (appendice 2 form.49), quì riscritta

$$R\left(\left.{Q \atop P}\right|\tau\right) = N\left({Q \atop P}\right) + \tau\cdot N^{(2)}\left({Q \atop P}\right) + \tau^2\cdot N^{(3)}\left({Q \atop P}\right) + \dots \qquad 1)$$

moltiplicando entrambi i membri per $R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right)$ ed integrando in σ, si ottiene una nuova funzione che può chiamarsi risolvente iterata:

$$R^{(2)}\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right) = \int_\sigma R\left(\left.{Q \atop P}\right|\tau\right) R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right) d\sigma_P = \int_\sigma N\left({Q \atop P}\right) R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right) d\sigma_P \; +$$

$$+\; \tau\cdot\int_\sigma N^{(2)}\left({Q \atop P}\right) R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right) d\sigma_P + \tau^2\cdot\int_\sigma N^{(3)}\left({Q \atop P}\right) R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right) d\sigma_P + \dots$$

Sviluppando ora anche $R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right)$, ciascun integrale coefficiente della precedente serie di potenze di τ diventa a sua volta una serie e si ha:

$$\tau^k\cdot\int_\sigma N^{(k)}\left({Q \atop P}\right) R\left(\left.{P \atop R}\right|\tau\right) d\sigma_P = \tau^k\cdot N^{(k+1)}\left({Q \atop R}\right) + \tau^{k+1}\cdot N^{(k+2)}\left({Q \atop R}\right) + \dots$$

Per scrivere la serie che si ottiene raggruppando i coefficienti delle potenze di τ provenienti dai varii integrali, si può osservare, che il termine in τ^0 proviene solo dal primo integrale, il termine in τ^1 proviene dal primo e dal secondo, e così via.

Si avrà così:

$$R^{(2)}\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right) = N^{(2)}\left({Q \atop R}\right) + 2\tau\cdot N^{(3)}\left({Q \atop R}\right) + 3\tau^2\cdot N^{(4)}\left({Q \atop R}\right) + \dots$$

Si riconosce facilmente che:

$$R^{(2)}\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right) = \frac{d}{d\tau}\left[R\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right)\right]$$

e ripetendo il procedimento

$$R^{(3)}\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right) = \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2}{d\tau^2}\left[R\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right)\right]$$

e in generale:

$$R^{(n)}\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\left[R\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right)\right]$$

E'ora possibile uno sviluppo in serie rispetto all'origine della funzione $R\left(\left.{Q \atop R}\right|\tau\right)$ quando in tal punto è olomorfa scrivendo:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau\right) = R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,0\right) + \tau\; R^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\middle|\,0\right) + \tau^2 R^{(3)}\left(\frac{Q}{R}\middle|\,0\right) + \cdots\cdots$$

Questo sviluppo è identico a quello di partenza espresso dalla 1), ma è un caso particolare di uno sviluppo che si può fare rispetto ad un qualsiasi altro punto fisso t, come segue:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau+t\right) = R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right) + \tau\; R^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right) + \tau^2 R^{(3)}\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right) + \cdots\cdots$$

Sia $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,0\right)$, sia $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right)$ possono essere considerati nuclei di equazioni di Fredholm e per il nucleo $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right)$ la precedente equazione è lo sviluppo in serie della risolvente.

Considerando allora di nuovo la 1), questa può essere scritta come:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau\right) = N\left(\frac{Q}{R}\right) + \tau\cdot\int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right)\left[\, N\left(\frac{P}{R}\right) + \tau\cdot N^{(2)}\left(\frac{P}{R}\right) + \tau^2\cdot N^{(3)}\left(\frac{P}{R}\right) + \cdots\right] d\sigma_P$$

oppure

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau\right) = N\left(\frac{Q}{R}\right) + \tau\cdot\int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) R\left(\frac{P}{R}\middle|\,\tau\right) d\sigma_P$$

Allora, quando $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right)$ è vista come nucleo, la sua nuova risolvente soddisfa l'analoga relazione espressa da:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau+t\right) = R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,t\right) + \tau\int_\sigma R\left(\frac{Q}{P}\middle|\,t\right) R\left(\frac{P}{R}\middle|\,\tau+t\right) d\sigma_P$$

oppure

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau_1\right) - R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau_2\right) = (\tau_1-\tau_2)\int_\sigma R\left(\frac{Q}{P}\middle|\,\tau_2\right) R\left(\frac{P}{R}\middle|\,\tau_1\right) d\sigma_P \qquad 2)$$

La circostanza che la funzione analitica $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau\right)$ abbia infiniti poli negli interi positivi k dell'asse reale del piano τ, la fa scrivere secondo il teorema di Mittag-Leffler in funzione dei residui $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$ nella forma:(form.4 appendice 3)

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\,\tau\right) = N\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{1}^{\infty}{}_{k}\; r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau-k} + \frac{1}{k}\right)$$

Sostituita nel primo membro della 2), trasforma questo come segue:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau_1\right) - R\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau_2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_1-k}+\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_2-k}+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_1-k}-\frac{1}{\tau_2-k}\right)$$

Con la stessa sostituzione il secondo membro della 2), diviso per $(\tau_1-\tau_2)$, diventa:

$$\oint_\sigma R\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau_2\right) R\left(\frac{P}{R}\middle|\tau_1\right) d\sigma_P = N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_1-k}+\frac{1}{k}\right)\oint_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) r_k\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_2-k}+\frac{1}{k}\right)\oint_\sigma r_k\left(\frac{Q}{P}\right) N\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P +$$

$$+\oint_\sigma \left[\sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{P}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_2-k}+\frac{1}{k}\right)\right]\left[\sum_{m=1}^{\infty} r_m\left(\frac{P}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_1-m}+\frac{1}{m}\right)\right] d\sigma_P =$$

$$= N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_1-k}+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{k}\cdot r_k\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_2-k}+\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{k}\cdot r_k\left(\frac{Q}{R}\right) +$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_1-k}+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{\tau_2-k}+\frac{1}{k}\right) r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$$

Per giungere a quest'ultima sommatoria si tiene conto della formula 9) dell'appendice 3) secondo cui sono nulli gli integrali dei residui con $m \neq k$, e della 13) della stessa appendice.
Semplificando ulteriormente si ha:

$$\oint_\sigma R\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau_2\right) R\left(\frac{P}{R}\middle|\tau_1\right) d\sigma_P =$$

$$= N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{k}{\tau_1-k}+1\right)+\left(\frac{k}{\tau_2-k}+1\right)-\left(\frac{k}{\tau_1-k}+1\right)\left(\frac{k}{\tau_2-k}+1\right)\right] r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$$

$$= N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[1-\frac{k^2}{(\tau_1-k)\cdot(\tau_2-k)}\right] r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$$

L'uguaglianza tra i due membri elaborati separatamente fornisce le successive relazioni:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau_1-k}-\frac{1}{\tau_2-k}\right)=$$

$$= (\tau_1-\tau_2)\cdot N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + (\tau_1-\tau_2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[1-\frac{k^2}{(\tau_1-k)\cdot(\tau_2-k)}\right] r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$$

oppure

$$(\tau_1-\tau_2)\cdot N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{\tau_1-\tau_2}{k^2}\left[1-\frac{k^2}{(\tau_1-k)\cdot(\tau_2-k)}\right]-\left(\frac{1}{\tau_1-k}-\frac{1}{\tau_2-k}\right)\right\} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)=0$$

$$(\tau_1-\tau_2)\cdot N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_1-\tau_2}{k^2}-\frac{\tau_1-\tau_2}{(\tau_1-k)(\tau_2-k)}-\frac{\tau_2-\tau_1}{(\tau_1-k)\cdot(\tau_2-k)}\right] r_k\left(\frac{Q}{R}\right)=0$$

$$N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cdot r_k\left(\frac{Q}{R}\right)=0$$