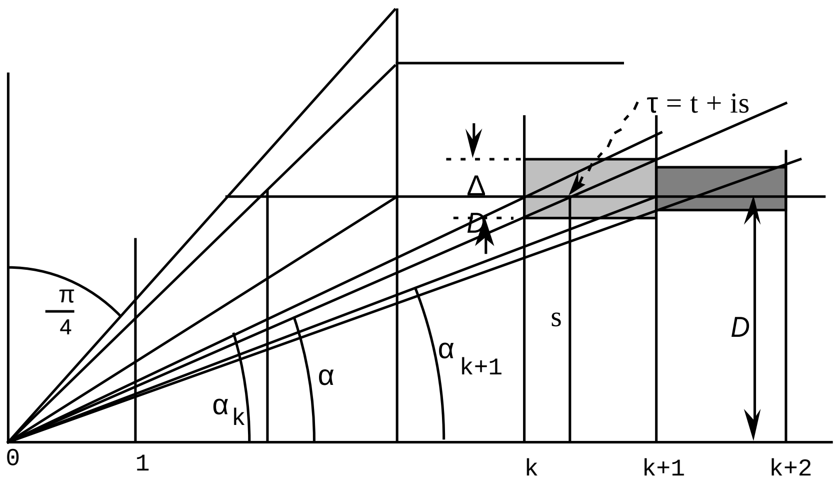
Cambiamento di osservatore e accelerazioni prevedibili

Alcune formule della teoria della relatività ristretta sono state ricavate in "**Composizione dei moti**" pur ammettendo la discretezza degli istanti in cui la materia è presente e osservabile, a patto di considerare soltanto moti che siano da sempre rimasti uniformi come anche la teoria ammette nel continuo.
Ciò si spiega tenendo conto del fatto che una velocità costante è, sia rapporto di incrementi finiti, sia di differenziali, riguardanti lo stesso moto.
Non è invece più possibile inglobare in una teoria del discreto quella della relatività generale, perché essa è essenzialmente una teoria differenziale, e quindi la spiegazione delle proprietà dinamiche dei corpi accelerati dovrà seguire un'altra strada.
Infatti sono propri della relatività generale i concetti di massa e di energia che sono stati introdotti nella relatività ristretta dalla meccanica classica, ma che non possono essere definiti in una teoria che non prevede accelerazioni e riguarda le trasformazioni lineari che hanno la proprietà di lasciare invariate le equazioni dell'elettromagnetismo macroscopico tra osservatori con moti relativi uniformi.
La massa è definibile in presenza di accelerazioni o degli equivalenti campi gravitazionali di cui è dotato o in cui è immerso anche un possibile osservatore accelerato, e l'energia lo è pure negli stessi casi.
Per studiare ciò, bisogna fare alcune premesse e ricordare che nel testo **"Il principio di Mach...."** è già stata considerata la necessità di un processo ricorsivo di distinzione in parti dell'universo.
Tale processo introduce nella rappresentazione l'arbitrio della fissazione degli elementi indivisi con cui si si formeranno strutture mediante legami originati da proprietà fissabili nello spazio di Mach.
La rotazione su se stessi degli indivisi non ha senso, perché, non avendo essi parti, non può essere definita e ciò semplifica lo studio di moti non uniformi.
Si è già incontrata in "**Composizione dei moti"** una struttura rigida consistente nel segmento di lunghezza D parallelo all'asse immaginario e indipendente da τ ottenuto attraverso due (ipotetici per la relatività ristretta) cambiamenti di velocità uguali e contrari.
Questa indipendenza da τ colloca la misura del segmento tra le grandezze misurabili dello spazio di Mach, che per ora può essere considerato uno spazio unidimensionale di moduli di vettori e che aumenterà le dimensioni quando dovranno essere considerati contemporaneamente più moti reciproci.
Se la lunghezza di un segmento può restare invariata per un tempo Re(τ) sufficientemente lungo, potrà essere misurata sebbene con precisione limitata come si vedrà tra poco.
A questo punto conviene riportare la figura incontrata in "**Composizione dei moti"** e fare con l'aiuto di questa alcune considerazioni.



La distanza D è raggiungibile in modo preciso solo dall'insieme numerabile di velocità corrispondente agli angoli α_k, α_{k+1},...... (incontri della retta s = D con le verticali per gli interi) con $\alpha_\infty = 0$ punto di accumulazione, e non è generalmente raggiungibile alla velocità della luce in modo preciso.

Senza contare la sensibilità finita degli strumenti di misura, esisterà un errore massimo ΔD_m associato all'intervallo (k , k+1) (punteggiatura più rada) maggiore degli errori ΔD associati alle singole misure negli intervalli unitari successivi (punteggiatura più spessa) per le velocità non appartenenti al precedente insieme.
Si determina quindi una scala di indeterminatezza larga ΔD_m per una distanza D dipendente da τ , che si fissa nello spazio di Mach σ, poiché solo in esso sono fissabili risultati di leggi naturali.
Ad una velocità prossima a quella della luce l'errore sulla misura è prossimo alla grandezza misurata, ma l'informazione è distribuita in σ sempre secondo funzioni ortogonali espresse dalle formule 26) e 27) del testo **"Il principio di Mach...."** qui riportate

$$r_k\left(\frac{P}{R}\right) = f_{k0}(P)\, g_{k0}(R) + f_{k1}(P)\, g_{k1}(R) + \cdots\cdots f_{kn}(P)\, g_{kn}(R) \qquad 26)$$

$$\int_\sigma g_{ki}(P)\, f_{kj}(P)\, d\sigma_P = \delta_{ij} \qquad 27)$$

mentre alle distanze D che non passano per un incrocio tra la verticale su un intero e la linea di luce di pendenza tg(α) = γ = ±1 non possono trovarsi residui associabili a quanti di luce.
Le condizioni di ortogonalità temporale e spaziale forniscono soluzioni per tali residui in termini di funzioni di Hermite per uno spazio σ unidimensionale e come funzioni di Laguerre e di Legendre in uno spazio σ tridimensionale.(vedere -- **Soluzioni unidimensionali** e **Soluzioni tridimensionali**)

Chiarito che alle basse velocità e operando per tempi lunghi la contemporanea misura di posizione e della velocità stessa produce errori impercettibili, si può passare a considerare come due osservatori vedano modificarsi le componenti di τ e di τ' a causa dell'essere in punti diversi R e R' di σ (accelerazioni gravitazionali diverse).
Un osservatore indiviso (abbastanza piccolo) che fa solo esperimenti locali in caduta libera o in orbita non può distinguere il suo stato da quello dell'osservatore in moto rettilineo uniforme lontano da sorgenti di gravità (Principio di equivalenza).
In particolare deve trovare due linee perpendicolari in quel punto che egli considera rette ed assi cartesiani del suo piano complesso τ o τ'.
Siccome ciò deve essere vero per tutti gli osservatori orbitanti, la trasformazione tra i piani complessi τ e τ' di due di essi deve essere conforme, e tra queste trasformazioni vanno scelte quelle che conservano le linee di luce.
Due osservatori A e B possono scambiarsi informazione se hanno in comune almeno gli oggetti indivisi su cui la scambiano indipendentemente dalla loro collocazione nei rispettivi piani temporali inizialmente con zeri sovrapposti.
Si suppone quindi che il parametro z sia lo stesso per entrambi e che τ' = 0 corrisponda a τ = 0 .
Se τ è il tempo complesso dell'osservatore **A** posto in R, e τ' quello dell'osservatore **B** in R', entrambi dotati di un moto che non sanno distinguere localmente da quello uniforme, vedranno conservarsi gli angoli,(in particolare quelli tra i loro assi cartesiani) ma non conservarsi l'allineamento degli zeri di D(τ) osservato da **B**, e D(τ') osservato da **A** .
Tali osservazioni sono trasferite mediante luce.
In generale le parallele agli assi t ed s del piano complesso τ di **A** saranno viste da **B** come due famiglie di linee ortogonali con due linee speciali (rette di luce) $\tau = r \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ che si trasformano in se stesse e varrà anche l'inverso.
Insomma quando l'osservatore **A**, considera punti di argomento vicino $\pm\frac{\pi}{4}$ lo stesso capita per **B**.
Su ciascuna retta immaginaria del proprio piano τ = k + is ogni osservatore sceglie arbitrariamente il verso positivo di s, ma per s → 0 i due osservatori A e B attribuiscono ad s valori opposti, mentre la parte reale t tende sovrapporsi.

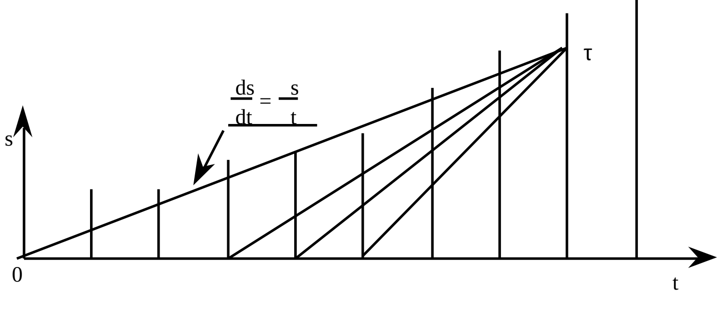
La trasformazione tra le osservazioni di A e quelle di B sul moto dell'altro avviene mantenendo la coniugazione complessa tra τ e τ' anche quando i valori di s aumentano e si approssima ad uno il rapporto $\frac{s}{t}$ e quindi gli estremi dell'arco della circonferenza unitaria tra $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{+i\frac{\pi}{4}}$ si scambiano per effetto della trasformazione.
La trasformazione per coniugazione complessa non è conforme tra le variabili τ e $\bar{\tau}$, ma ciò non esclude che su piani distinti si corrispondano $\bar{\tau}'$ e τ.
E' allora possibile trattare la trasformazione $\bar{\tau}' = F(\tau)$ riscritta come $t' + i\cdot\bar{s}' = F(t+is)$ come funzione analitica .

Se un punto del piano τ appartiene alle rette $t - is = 0$ oppure $t + is = 0$ vale anche:
$(t - is)(t + is) = 0 = \tau\cdot\bar{\tau} = t^2 + s^2$

La condizione $t^2 + s^2 = 0$ esprime che il punto (t,s) è su una delle rette di luce $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ o $e^{+i\frac{\pi}{4}}$.
In tutti gli altri casi sarà: $s = \pm i\gamma t$ con $|\gamma| < 1$ e poi $s^2 = -\gamma^2 t^2$; $\tau\cdot\bar{\tau} = t^2 + s^2 = t^2(1 - \gamma^2) \neq 0$ dove come già stabilito nel testo "**Composizione dei moti**" $\gamma = \frac{s}{t} = tg(\alpha)$.

Alla trasformazione si impone che a punti interni al quadrante permesso di argomenti contenuti tra $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{+i\frac{\pi}{4}}$ sul piano τ corrispondano punti interni al quadrante permesso del piano τ' .
Poiché nell'origine, arbitrariamente scelta, il valore del determinante di Fredholm $D(0) = 1$ assicura per $\tau = 0$ l'inesistenza di qualsiasi informazione (luce o materia), lo zero di $t^2 + s^2$ non interferisce con l'imposizione $t'^2 + s'^2 = 0$ che si estende ad ogni t soltanto per la luce.
La conservazione delle rette di luce nella trasformazione tra i piani τ dell'osservatore A e τ' dell'osservatore B si esprime imponendo che $\tau'\cdot\bar{\tau}' = t'^2 + s'^2 = 0$ quando e solo quando $t^2 + s^2 = 0$.
Posto $g = \frac{t^2 + s^2}{t^2}$ e $g' = \frac{t'^2 + s'^2}{t'^2}$ deve essere $g' = 0$ quando e solo quando $g = 0$ e viceversa.

La funzione g' non deve avere zeri per $g \neq 0$ quando τ e $\bar{\tau}$ sono entrambi nel quadrante tra $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{+i\frac{\pi}{4}}$, perché in caso contrario l'osservatore B vedrebbe luce associata a moti non estremi sul piano τ di A .
Nel testo "**Composizione dei moti**" , trattandosi di moti uniformi, si è sempre supposto che $\gamma = \frac{s}{t}$ sia uguale a $\frac{ds}{dt}$, anzi, che ciò sia vero in ogni punto τ, è proprio la definizione di moto uniforme.
Per i moti , che a differenza di quelli della luce possono non essere uniformi, sarà generalmente: $\gamma = \frac{ds}{dt} \neq \frac{s}{t}$, ma questa diversità può essere fatta corrispondere per ogni punto τ a traslazioni discrete dell'origine dei tempi.



Ciò comporta che abbia definizione precisa una funzione $\gamma(\tau)$, prima definita per una origine fissa, per quei punti del piano τ che hanno intersezione della retta passante per essi e per un intero dell'asse reale t, perché ciascuno di tali punti può essere scelto come origine data l'invarianza del determinante di Fredholm per traslazione.

Non potendo più contare su uno zero fisso, si può ancora definire una funzione $\gamma(\tau) = \frac{ds}{d\tau}$, che per $\tau = t$ reale sia come prima $\gamma = \frac{ds}{dt}$, con l'implicito ampliamento di s al campo complesso.

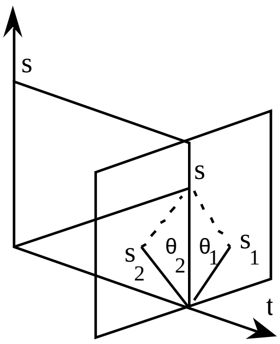
Un'unica funzione $\gamma(\tau)$ esiste, se $\frac{ds}{d\tau}$, non dipendendo dalla direzione dell'incremento sul piano τ, è analitica, restando vero come prima che:

$$\tau \cdot \bar{\tau} = t^2(1 - \gamma^2) = g \cdot t^2 \neq 0 \quad .$$

La funzione $\gamma(\tau)$ reale riguarda il caso particolare in cui nel prodotto $\tau \cdot \bar{\tau}$ si annulla la parte immaginaria, ma se si amplia per $\bar{\tau}$ la definizione di complesso coniugato a numero con la stessa parte reale di τ , le parti immaginarie non si compensano più e $\frac{\tau \cdot \bar{\tau}}{t^2} = g$ esplora un'area del piano g.

Ai valori assoluti del caso $\tau \cdot \bar{\tau}$ e g reali si sostituiscono i moduli e per $\left|\frac{ds}{d\tau}\right|^2 = |\gamma(\tau)|^2 < 1$.

La funzione $s(\tau)$ diventa anch'essa analitica e si può indicarla con $s(\tau) = s_1 + js_2$, definendo uno spazio in cui il numero reale s della coppia ordinata (t,s) si trasforma a sua volta una coppia ordinata (s_1,s_2) e j è l'unità immaginaria del piano s.



Così nel punto τ^*, che può essere τ oppure $\bar{\tau}$, sarà $\tau^* = t + is = t + i\cdot(s_1 + js_2)$ e la funzione $\gamma(\tau) = \frac{ds}{d\tau} = \frac{d(s_1 + js_2)}{d\tau}$ è indipendente dall'origine scelta.

Arbitrariamente si può porre: $\tau = t + i\cdot(s_1)$ e $\bar{\tau} = t + i\cdot(js_2)$.

Se τ e $\bar{\tau}$ sono entrambi nel quadrante permesso, sia il prodotto $\tau \cdot \bar{\tau}$ sia la variabile g sono nel semipiano positivo.

La relazione tre g' e g dovrà essere priva di poli e della forma: $g' = g\cdot\phi(g)$ con $\phi(g)$ priva di zeri al finito nel semipiano reale positivo in modo che gli eventuali zeri $\phi(g)$ con parte reale negativa facciano cadere i valori di τ e $\bar{\tau}$ fuori del quadrante permesso.

La mancanza di poli è facilmente ottenuta imponendo che $\phi(g)$ sia olomorfa e quindi espressa dalla serie:

$\phi(g) = a_1 + a_2 g + a_3 g^2 + \ldots\ldots.$

L'estensione fatta prima al piano complesso della variabile $g = \frac{\tau \cdot \bar{\tau}}{t^2}$ ampliando la definizione di $\bar{\tau}$ può essere ora intesa come applicazione del principio di permanenza delle proprietà analitiche inizialmente valide sull'asse reale.

La serie $\phi(g)$ può scriversi per mezzo degli zeri (a parte reale negativa) $g_1, g_2 \dots g_{n-1}\dots$ come prodotto di fattori nella forma:

$$\phi(g)=\lambda(g-g_1)(g-g_2)\dots(g-g_{n-1})\dots = a_1 + a_2 g + a_3 g^2 + \dots + a_n g^{n-1} + \dots \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{a_1}{g_1\cdot g_2\cdot \dots g_{n-1}\dots}$$

Nessuno dei fattori $(g - g_k)$ può annullarsi, quando g e poi $\tau\cdot\bar{\tau}$ sono nel semipiano reale positivo e quindi:

$$\ln[\phi(g)] = \ln(\lambda) + \ln(g-g_1) + \ln(g-g_2) + \dots + \ln(g-g_{n-1}) + \dots$$

$$\frac{d\{\ln[\phi(g)]\}}{dg} = \frac{\frac{d\phi(g)}{dg}}{\phi(g)} = \frac{1}{g-g_1} + \frac{1}{g-g_2} + \dots + \frac{1}{g-g_{n-1}} + \dots$$

$$\frac{d\phi(g)}{dg} = \frac{\phi(g)}{g-g_1} + \frac{\phi(g)}{g-g_2} + \dots + \frac{\phi(g)}{g-g_{n-1}} + \dots$$

Quando la serie $\phi(g)$ si arresta all'n^{mo} termine, $\phi(g) = a_1 + a_2 g + a_3 g^2 + \dots + a_n g^{n-1}$ diventa un polinomio di Hurwitz, che è studiato nei problemi di stabilità dei sistemi.

Se $\gamma(\tau)$ è analitica e la derivata $\frac{ds}{d\tau}$ è invariante rispetto alla direzione dell'incremento in τ, sarà per ogni punto di τ e per $d\tau = dt$: $\gamma(\tau) = \frac{ds}{dt}$

Dopo la definizione ampliata di $\bar{\tau}$ e l'estensione al campo complesso di $\tau\cdot\bar{\tau}$ e di g, le precedenti formule diventano:

$$\tau\cdot\bar{\tau} = t^2(1-\gamma^2) = t^2\left\{1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right\} \quad ; \quad g = 1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2 \quad ; \quad g' = \left\{1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right\}\cdot\phi(g) \quad ;$$

$$g' = g\cdot\phi(g) = \left\{1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right\}\cdot\phi\left(1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right) = 1 - \left[\frac{d(s'_1+js'_2)}{dt'}\right]^2$$

Se l'osservatore B sul piano τ' vede un moto uniforme e $\frac{\tau'\cdot\bar{\tau}'}{t'^2} = (1-\gamma^2) = \left\{1 - \left[\frac{d(s'_1+js'_2)}{dt'}\right]^2\right\} = C$ costante reale, ogni altro osservatore A trova tale moto sottoposto all'equazione:

$$g' = g\cdot\phi(g) = \left\{1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right\}\cdot\phi\left(1 - \left[\frac{d(s_1+js_2)}{dt}\right]^2\right) = C$$ anche quando $\phi(g)$ è un polinomio di Hurwitz.

I polinomi di Hurwitz, $\phi(g)$ possono essere studiati in ordine di grado crescente e per ora ci si occupa del più semplice $\phi(g) = a_1 + a_2 g$ con un solo zero a parte reale negativa espresso dal polinomio secondo la:

$$\frac{d\phi(g)}{dg} = \frac{\phi(g)}{g-g_1} = a_2\cdot\frac{g+\frac{a_1}{a_2}}{g-g_1} = a_2 .$$

Dalla $g_1 = -\frac{a_1}{a_2}$ discende che la parte immaginaria di g_1 è quella di $\frac{a_1}{a_2}$ e i coefficienti del polinomio di Hurwitz non sono generalmente reali.

La trasformazione tra i piani dei due osservatori con $\phi(g) = a_1 + a_2 g$ si scrive:

$$\left[1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]\cdot\left\{a_1 + a_2\left[1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]\right\} = C \quad ; \quad a_2\left[1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]^2 + a_1\cdot\left[1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = C$$

$$a_2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 - (2\,a_2 + a_1)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + (a_2 + a_1) = C \quad ; \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 - \left(2 + \frac{a_1}{a_2}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 1 + \frac{a_1}{a_2} - \frac{C}{a_2} = 0$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a_1}{2a_2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - 1 - \frac{a_1}{a_2} + \frac{C}{a_2}}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a_1}{2a_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{C}{a_2}}$$

Quando a_1, a_2 e C sono costanti ogni osservatore A trova $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ = costante che si può indicare con il nome dell'osservatore scrivendo: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = A$ e poi $\frac{ds}{dt} = \sqrt{A}$.

Per l'analiticità di $s(\tau) = s_1 + js_2 = s(t + is)$ la derivata con differenziale dt è uguale a quella in $d\tau$ con $d\tau$ in qualsiasi direzione potendo scrivere: $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\tau}$ e $\left|\frac{ds}{d\tau}\right| = \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2}$.

Il modulo della derivata $\left|\frac{ds}{d\tau}\right|$ è il coefficiente di dilatazione lineare locale e il modulo $\left|\frac{ds}{d\tau}\right|^2$ è il coefficiente di dilatazione delle aree.

$$\left|\frac{ds}{d\tau}\right|^2 = \left|\left(1 + \frac{a_1}{2a_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{C}{a_2}}\right| = |A|$$

Questa la legge di conservazione delle aree per il caso semplice di un polinomio di Hurwitz di primo grado.
Lo studio dei successivi polinomi farà parte di ulteriori lavori.