SOLUZIONI PER UNO SPAZIO σ UNIDIMENSIONALE

Nel caso di uno spazio di Mach σ a una dimensione la 24) diviene:

$$-\rho_k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_k\begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix} \rho_k\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} dx \qquad 28)$$

Delle tre dimensioni dello spazio u intervengono in modo esplicito nella 28) la componente continua x di σ e i valori interi k della componente reale t della variabile complessa τ.
La 26) assume la forma:

$$-\rho_k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = f_{k0}(x_1)\, g_{k0}(x_0) + f_{k1}(x_1)\, g_{k1}(x_0) + \cdots\cdots f_{kn}(x_1)\, g_{kn}(x_0) \qquad 29)$$

e la 27) si trasforma in:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{kr}(x)\, f_{ks}(x)\, dx = \delta_{rs} \qquad 30)$$

mentre δ_{rs} assume il significato ordinario e i prodotti di matrici ad una riga e una colonna diventano prodotti ordinari e invertibili.
Ricordando che la 28) si riferisce a un valore unico τ = k nei due membri, si può trascurare tale indice ponendo: $-\rho_k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$
Allora l'equazione 28) diviene:

$$u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} u\begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix} u\begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix} dx \qquad 31)$$

e , intendendo trascurato l'indice k per le funzioni g ed f , la 29) dà :

$$u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} =$$

$$= f_0(x_1)\, g_0(x_0) + f_1(x_1)\, g_1(x_0) + \cdots\cdots f_n(x_1)\, g_n(x_0) = \sum_{0}^{n}{}_h\, f_h(x_1)\, g_h(x_0) \qquad 32)$$

Introducendo quest'espressione di $u\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ nella 31), si ottiene:

$$\sum_{h=0}^{n} f_h(x_1)\, g_h(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} f_r(x_1)\, g_r(x) \cdot \sum_{s=0}^{n} f_s(x)\, g_s(x_0) \quad dx \qquad 33)$$

Poiché la 30) impone di cercare la soluzione tra le funzioni ortogonali sull'intervallo $(-\infty,\infty)$ normalizzate ad 1, è sufficiente trovare le funzioni $f_s(x)$ e $g_r(x)$ che soddisfino l'equazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s(x)\, g_r(x)\, dx = \delta_{rs} \qquad 34)$$

Si trovano soluzioni in termini di polinomi ortogonali classici sull'intervallo $(-\infty,\infty)$ con la funzione peso uguale a e^{-x^2} noti come polinomi di Hermite $H_r(x)$, dati da:

$$f_r(x) = a_r\, H_r(x)\, e^{-bx^2 + cx} \qquad g_r(x) = a_r\, H_r(x)\, e^{-(1-b)x^2 - cx} \qquad 35)$$

dove b e c sono costanti complesse arbitrarie ed a_r sarà scelta in modo da verificare la 34) .

I polinomi $H_r(x)$ possono essere dedotti dal peso secondo l'equazione:

$$H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r} (e^{-x^2})$$

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = - e^{x^2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) = -e^{x^2} (-2x\, e^{-x^2}) = 2x$

$H_2(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx} (-2x\, e^{-x^2}) = e^{x^2} (-2+4x^2)e^{-x^2} = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = - e^{x^2} \frac{d}{dx} [(-2+4x^2)e^{-x^2}] = - e^{x^2} (8x + 4x - 8x^3)e^{-x^2} = 4(2x^3 - 3x)$

$H_4(x) = e^{x^2} \frac{d}{dx} [(12x - 8x^3)e^{-x^2}] = e^{x^2} [(12 - 24x^2 - 24x^2 + 16x^4)e^{-x^2}] = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)$

$H_5(x) = - e^{x^2} \frac{d}{dx} [4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}] = - e^{x^2} [4(- 8x^5 + 40x^3 - 30x)]\, e^{-x^2} = 8(4x^5 - 20x^3 + 15x)$

$H_6(x) =$..

Si può constatare la validità delle seguenti equazioni:

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2} H_{n+1}(x) \qquad 36)$$

$$\frac{d}{dx}[H_n(x)] = H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad 37)$$

L'ortogonalità dei polinomi di Hermite assicura il rispetto della 34), che a sua volta consente di semplificare la 33) annulando i prodotti con $s \neq r$ che compongono la funzione da integrare, e permette di scriverla come:

$$\sum_{0}^{n}{}_{h}\, f_h(x_1)\, g_h(x_0) \;=\; \sum_{0}^{n}{}_{r}\, f_r(x_1)\, g_r(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\, g_r(x) \quad dx$$

I prodotti $f_r(x)\, g_r(x) = a_r^2 H_r^2(x)\, e^{-x^2}$ costruiti secondo le 35) possono essere integrati sull'intervallo $(-\infty,\infty)$ e per rispettare la 34) deve essere:

$$\frac{1}{a_r^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_r^2(x)\, dx = 2^r r! \sqrt{\pi} \qquad \text{da cui} \qquad a_r = (2^r r!)^{-1/2} \pi^{-1/4}$$

Così le 35) diventano più specificate scrivendo:

$$f_r(x) = (2^r r!)^{-1/2} \pi^{-1/4} H_r(x)\, e^{-bx^2 + cx}$$

$$g_r(x) = (2^r r!)^{-1/2} \pi^{-1/4} H_r(x)\, e^{-(1-b)x^2 - cx} \qquad 38)$$

Il primo membro della 33) assume la forma:

$$\sum_{0}^{n}{}_{r}\, f_r(x_1)\, g_r(x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{n}{}_{r} \frac{1}{2^r r!} H_r(x_1) e^{-bx_1^2 + cx_1} \;\; H_r(x_0)\;\; e^{-(1-b)x_0^2 - cx_0} =$$

$$= e^{-x_0^2}\, e^{-b(x_1^2 - x_0^2) + c(x_1 - x_0)} \sum_{0}^{n}{}_{r} \frac{H_r(x_1)\;\; H_r(x_0)}{2^r r! \sqrt{\pi}} \;=\; u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \qquad 39)$$

Il residuo nei poli del nucleo risolvente 17) per uno spazio s a una dimensione viene specificato dalla:

$$-r_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \;\; e^{-(x_1 - x_0)[b(x_1 + x_0) + c] - x_0^2} \sum_{0}^{n}{}_{r} \frac{H_r(x_1)\;\; H_r(x_0)}{2^r r! \sqrt{\pi}} \qquad 40)$$

Secondo la formula di Darboux-Christoffel **(A.Nikiforov Y.Ouvarov, Éléments de la théorie des fonctions spéciales)** ques'ultima somma può essere espressa per mezzo delle sole funzioni di Hermite di ordine n e n+1 ottenendo:

$$-r_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \frac{e^{-(x_1 - x_0)[b(x_1 + x_0) + c] - x_0^2}}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \cdot \frac{H_{n+1}(x_1)\;\; H_n(x_0) - H_n(x_1)\;\; H_{n+1}(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad 41)$$

Dalle 36) e 37) si ottiene l'equazione differenziale che il polinomio $H_n(x)$ soddisfa ed è la seguente:

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad 42)$$

Ponendo per semplicità di scrittura nella prima delle 35) uguale a 1 la costante a_n, non influente al fine di risolvere la 42), la forma di $H_n(x)$ è:

$H_n(x) = f_n(x)\, e^{bx^2 - cx}$ e poi:

$$H'_n(x) = [f'_n(x) + (2bx - c)f_n(x)]\, e^{bx^2 - cx}$$

$$H''_n(x) = \{f''_n(x) + 2(2bx - c)f'_n(x) + [2b + (2bx - c)^2]f_n(x)\}\, e^{bx^2 - cx}$$

Sostituendo nella 42) queste espressioni di $H_n(x)$ e delle sue derivate, e dividendo tutti i termini per il fattore comune $e^{bx^2 - cx}$ si giunge ad un'equazione différenziale per $f_n(x)$ data da:

$$\frac{f''_n(x) + 2[(2b - 1)x - c]f'_n(x)}{4b(b - 1)} + \left[x - \frac{c(2b - 1)}{4b(b - 1)}\right]^2 f_n(x) =$$

$$= \left\{\left[\frac{c(2b - 1)}{4b(b - 1)}\right]^2 - \frac{c^2 + 2b + 2n}{4b(b - 1)}\right\} f_n(x) \qquad 43)$$

Essendo b e c arbitrarii, dopo aver posto $2b - 1 = a$ e per conseguenza $4b(b - 1) = a^2 - 1$, si può scrivere la 43) nella forma:

$$f''_n(x) + 2[ax - c]f'_n(x) + (a^2 - 1)\left[x^2 - 2\frac{ac}{a^2 - 1}x + c^2 + a + 1 + 2n\right] f_n(x) = 0 \qquad 44)$$

Conseguentemente le 35) diventano:

$$f_r(x) = a_r H_r(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{a}{2}x^2 + cx} \qquad g_r(x) = a_r H_r(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{a}{2}x^2 - cx} \qquad 45)$$

Si era tralasciato l'indice k del residuo $r_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ scrivendo la 31), ma ora si può tenerne conto fissando i valori dei coefficienti a e c.

Per fare ciò si usano la 18) e la 22) qui riscritte per uno spazio σ a una dimensione, ottenendo le equazioni:

$$R\left(\frac{x_1}{x_0}\Big|\,\tau_1\right) - R\left(\frac{x_1}{x_0}\Big|\,\tau_2\right) = (\tau_1 - \tau_2)\int_\sigma R\left(\frac{x_1}{x}\Big|\,\tau_1\right) R\left(\frac{x}{x_0}\Big|\,\tau_2\right) dx \qquad 46)$$

$$R\left(\frac{x_1}{x_0}\Big|\,\tau\right) = N\left(\frac{x_1}{x_0}\right) + \sum_1^{\infty} r_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau - k} + \frac{1}{k}\right) \qquad 47)$$

Come si ricava dalla 20), il nucleo risolvente $R\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_0 \end{matrix} \middle| \tau\right)$ è singolare per τ intero e solo in tal caso esistono residui non nulli nei suoi poli.

La sostituzione della 47) nella 46) **(vedi appendice 4)** porta alla 23) e nel caso unidimensionale è espressa da:

$$N^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot r_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad 48)$$

Per ragioni fisiche il coefficiente d'influenza iterato $N^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ deve escludere i valori infinito e zero, e la stessa condizione deve valere per l'altro termine della 48) imponendo:

$$0 < -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot r_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} < \infty$$

Posto nella 41) $b = \frac{a+1}{2}$, essa diventa:

$$-r_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \qquad 49)$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_0^2)}}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \cdot \frac{H_{n+1}(x_1)\, H_n(x_0) - H_n(x_1)\, H_{n+1}(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2)} \cdot e^{-c\,(x_1 - x_0)}$$

e solo il fattore $e^{-\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2)} \cdot e^{-c\,(x_1 - x_0)}$ può dipendere da τ per mezzo di a e c, perché il primo membro della 49) dipende dal valore k di τ.

Posto $\frac{e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_0^2)}}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \cdot \frac{H_{n+1}(x_1)\, H_n(x_0) - H_n(x_1)\, H_{n+1}(x_0)}{x_1 - x_0} = G$

la parte del residuo indipendente da τ, si può scrivere:

$$0 < G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2)} \cdot e^{-c(x_1 - x_0)} < \infty$$

La parte reale $Re[\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2) + c(x_1 - x_0)] \geq 0$ permette la convergenza della precedente somma infinita ed inoltre:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2)} \cdot e^{-c(x_1 - x_0)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = 1{,}644934$$

La parte immaginaria di $\frac{a}{2}(x_1^2 - x_0^2) + c(x_1 - x_0)$ e poi dell'esponente delle funzioni f e g espresse dalle 38) può essere usata per renderle covarianti o no rispetto a trasformazioni relativistiche, ma per ora conviene occuparsi del caso più semplice in cui, posto $a = 0$ e $c = 0$, l'equazione 44) si trasforma nella seguente:

$$-f''_n(x) + x^2 f_n(x) = (1 + 2n) f_n(x)$$

Anche $g_n(x)$ verifica la stessa equazione differenziale.

Cambiando l'unità di misura di x secondo la $x = my$, e moltiplicando tutti i termini dell'equazione differenziale per un fattore arbitrario λ, essa si trasforma in:

$$-\frac{\lambda}{\mu^2} \psi''_n(y) + \lambda\mu^2 y^2 \psi_n(y) = \lambda(1 + 2n)\psi_n(y) \qquad 50)$$

avendo posto: $f_n(x) = \psi_n(y)$

e conseguentemente $f'_n(x) = \frac{1}{\mu} \psi'_n(y)$; $f''_n(x) = \frac{1}{\mu^2} \psi''_n(y)$

La 50) è l'equazione di Schrödinger per l'oscillatore armonico in un campo elastico di costante K che si può riconoscere quando venga fatta la seguente sostituzione di coefficenti:

$$\frac{\lambda}{\mu^2} = \frac{\hbar^2}{2m} \ ; \ \lambda\mu^2 = \frac{K}{2} = \frac{m\omega^2}{2} \ ; \lambda^2 = \frac{\hbar^2\omega^2}{4} \ ; \ \lambda = \frac{\hbar\omega}{2}$$

per farla diventare:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \psi''_n(y) + \frac{K}{2} y^2 \cdot \psi_n(y) = \hbar\omega \cdot (n + \frac{1}{2}) \cdot \psi_n(y) \qquad 51)$$

Risultando in questo caso $f_n(x)$ uguale a $g_n(x)$, le 29) e 32) prendono la forma:

$$-\rho_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = u\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \sum_{h=0}^{n} f_h(x_1)\, f_h(x_0) \qquad 52)$$

e la 41) o la 49) diventano:

$$-r_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_0^2)}}{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{H_{n+1}(x_1)\ H_n(x_0) - H_n(x_1)\ H_{n+1}(x_0)}{x_1-x_0} \qquad 53)$$

dove k designa l'istante ed n l'ordine di molteplicità delle soluzioni della 28) relative al valore caratteristico $\lambda = 1$.

L'informazione elementare $r_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ su x_1 con riferimento x_0 si avvia a diventare auto-informazione, quando x_1 tende a x_0 e al limite assume la forma:

$$r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = \lim_{x_1 \to x_0} r_k\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = -q_n \cdot \frac{e^{-x_0^2}}{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}} \ ;$$

avendo indicato con

$$q_n = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{H_{n+1}(x_1)\ H_n(x_0) - H_n(x_1)\ H_{n+1}(x_0)}{x_1-x_0} =$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{H_{n+1}(x_0+u)\ H_n(x_0) - H_n(x_0+u)\ H_{n+1}(x_0)}{u} = \quad \text{(Hopital)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \left\{H_n(x_0)\cdot\frac{d}{du}[H_{n+1}(x_0+u)] - H_{n+1}(x_0)\cdot\frac{d}{du}[H_n(x_0+u)]\right\}$$

L'uso della 37) consente di scrivere:

$$q_n = \lim_{u \to 0} [H_n(x_0)\cdot 2(n+1)H_n(x_0+u) - H_{n+1}(x_0)\cdot 2nH_{n-1}(x_0+u)] =$$

$$= 2[(n+1)H^2_n(x_0) - nH_{n+1}(x_0)\cdot H_{n-1}(x_0)]$$

Il quadrato della 36) è dato da:

$$-nH_{n+1}(x_0)\cdot H_{n-1}(x_0) = n^2H^2_{n-1}(x_0) + \frac{1}{4}H^2_{n+1}(x_0) - x_0^2H^2_n(x_0) \qquad \text{da cui:}$$

$$q_n = 2[(n+1-x_0^2)H^2_n(x_0) + n^2H^2_{n-1}(x_0) + \frac{1}{4}H^2_{n+1}(x_0)]$$

e quindi si giunge alla forma di $r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right)$

$$-r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = \frac{e^{-x_0^2}}{2^n n!\sqrt{\pi}} \cdot [(n+1-x_0^2)H^2_n(x_0) + n^2H^2_{n-1}(x_0) + \frac{1}{4}H^2_{n+1}(x_0)] \qquad 54)$$

Nel caso di uno spazio di Mach s a una dimensione dalle relazioni 21) e 14) si ottengono rispettivamente le:

$$\rho_k\left(x_0\right) = \frac{(-1)^k \cdot z^k}{(k-1)!}\cdot D\left(x_0\,\middle|\,k\right) \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} D\left(x_0\,\middle|\,k\right) dx_0 = -D'(k)$$

dalle quali, poiché $D'(k) = \dfrac{\pi\Gamma(k)\cos(\pi k)}{\pi z^{\tau}} = \dfrac{(k-1)!(-1)^k}{z^k}$, discende:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \rho_k\left(x_0\right) dx_0 = -\frac{(-1)^k \cdot z^k}{(k-1)!}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} D\left(x_0\,\middle|\,k\right) dx_0 = -\frac{(-1)^k \cdot z^k}{(k-1)!}\cdot[-D'(k)] = 1$$

Allora anche l'integrale del secondo membro della 54) deve essere uguale ad uno e usando le:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_r^2(x)\,dx = 2^r r!\sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = r!(2r+1)2^{r-1}\sqrt{\pi}$$ **<u>(Appendice 5)</u>**

si possono calcolare gli integrali contenuti nella sua espressione:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \rho_k\left(x_0\right) dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x_0^2}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\cdot\left[(n+1-x_0^2)H_n^2(x_0) + n^2 H_{n-1}^2(x_0) + \frac{1}{4}H_{n+1}^2(x_0)\right] dx_0 = 1$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \rho_k\left(x_0\right) dx_0 =$$

$$= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2}\cdot\left[(n+1-x_0^2)H_n^2(x_0) + n^2 H_{n-1}^2(x_0) + \frac{1}{4}H_{n+1}^2(x_0)\right] dx_0 =$$

$$= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\left[(n+1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2}\cdot H_n^2(x_0)\,dx_0 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2} x_0^2 H_n^2(x_0)\,dx_0 + \right.$$

$$\left. + n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2} H_{n-1}^2(x_0)\,dx_0 + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2} H_{n+1}^2(x_0)\,dx_0\right] =$$

$$= \frac{(n+1)\, 2^n n!\sqrt{\pi} - n!(2n+1)2^{n-1}\sqrt{\pi} + n^2\cdot 2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi} + \frac{1}{4}\, 2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^n n!\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{(n+1)\, 2^n n! - n!(2n+1)2^{n-1} + n^2\cdot 2^{n-1}(n-1)! + \frac{1}{4}\, 2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} =$$

$$= \frac{(n+1)\, 2n! - n!(2n+1) + n^2\cdot(n-1)! + (n+1)!}{2n!} =$$

$$= \frac{(n+1)\, 2n! - n!(2n+1) + n\cdot n! + (n+1)!}{2n!} =$$

$$= \frac{2n+2 - 2n - 1 + n + n+1}{2} =$$

$$= \frac{2 + 2n}{2} = 1 \quad ; \quad n = 0$$

Se si pone n = 0 nella 54), si ottiene l'auto-informazione, o l'informazione sul punto di osservazione x_1, quando esso va a coincidere con il punto di riferimento x_0, quest'equazione diventa:

$$-r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = \frac{e^{-x_0^2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[(1 - x_0^2) + \frac{1}{4} H_1^2(x_0)\right] = \frac{e^{-x_0^2}}{\sqrt{\pi}}$$

poiché $H_1(x_0) = 2x_0$

In questo caso il primo membro della 52) si trasforma nella semplice relazione:

$$-r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = u\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = f_0(x_0)\, f_0(x_0)$$

Questa dimostra la completa analogia formale con i risultati della meccanica quantistica a condizione di interpretare il residuo $r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right)$ nel generico polo τ = k della risolvente $R\left(\left.\frac{x_0}{x_0}\right|\tau\right)$ come la probabilità di trovare in x_0 la singolarità intorno a cui si calcola il residuo.

$u\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = -r_k\left(\frac{x_0}{x_0}\right)$ è il quadrato della funzione d'onda $f_0(x_0)$ ed è di integrale unitario sull'intero asse x, come deve essere per una probabilità.

La forma di $f_0(x_0) = \frac{e^{-\frac{x_0^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$ è quella classica per l'oscillatore armonico, se x_0 moltiplicato per $\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ viene considerato come sposamento dalla posizione di equilibrio considerata nell'origine.

Così anche l'osservazione istantanea che un osservatore fa di se stesso resta per la maggior parte distribuita su un intorno dell'origine come per non far esistere l'osservatore puntiforme.

Nella 54) si è dovuto porre n = 0 per l'autoinformazione, e come conseguenza della scelta fatta originariamente per D(τ), è discesa la forma particolarmente semplice del residuo

$$r_k\begin{pmatrix}x_0\\x_0\end{pmatrix} = \left[i \cdot f_0(x_0)\right]^2$$

ma per una generica informazione tutte le f_r con $0 \le r \le n$ sono diverse da zero come le g_r ed il residuo è dato dalla 32) nella forma:

$$- r_k\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix} = \sum_{0}^{n}{}_r\, f_r(x_1)\, g_r(x_0)$$

mentre le f_r e g_r sono date, o come soluzioni dell'equazione di Schrödinger, o dalle 38) quì riscritte:

$$f_r(x) = (2^r r!)^{-1/2}\pi^{-1/4} H_r(x)\, e^{-bx^2 + cx}$$

$$g_r(x) = (2^r r!)^{-1/2}\pi^{-1/4} H_r(x)\, e^{-(1-b)x^2 - cx}$$

Mentre $r_k\begin{pmatrix}x_0\\x_0\end{pmatrix}$ è un evento puro, $r_k\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix}$ è un evento dell'istante τ = k con una distribuzione spaziale.

Finché una linea del piano complesso τ non si chiude intorno ad un certo numero di punti singolari, il residuo somma non ha definizione ed avrebbe il significato di una grandezza stabile nel tempo qualora la linea si chiudesse dopo un ultimo punto singolare.

Il fatto è che $R\left(\begin{matrix}x_1\\x_0\end{matrix}\middle|\,\tau\right)$ ha come punti singolari tutti gli interi positivi dell'asse reale e quindi una stabilità rigorosa dell'informazione portata da una somma di residui non può mai avvenire, ma si può vedere dalla relazione 21) riscritta come:

$$r_k\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix} = \frac{(-1)^k \cdot z^k}{(k-1)!} \cdot D\left(\begin{matrix}x_1\\x_0\end{matrix}\middle|\,k\right) \qquad 55)$$

che i residui per valori elevati di k tendono a zero per effetto del fattoriale al denominatore, poiche le soluzioni dell'equazione di Fredholm $D\left(\begin{matrix}x_1\\x_0\end{matrix}\middle|\,k\right)$ sono limitate.

L'equazione 23)

$$N^{(2)}\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix} = - \sum_{1}^{\infty} k\, \frac{1}{k^2}\, r_k\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix}$$

mostra lo stabilizzarsi del coefficiente di influenza iterato e per k suffientemente grande la pratica stabilità delle leggi di natura.

Una particella stabile può allora essere rappresentata da una linea aperta che può racchiudere sempre nuovi punti singolari ormai incapaci di incrementare apprezzabilmente il residuo totale.

Una linea, che contenga tutti i punti singolari in ordine crescente, all'atto della chiusura ha solo due alternative rispetto al verso di percorrenza e può rappresentare due particelle prive di antiparticella.

Viceversa, se una linea, determinata all'inizio come funzione analitica finché resta imperturbata, avvolge solo insiemi parziali di punti singolari, gli insiemi inclusi ed esclusi possono ancora rappresentare particelle stabili che possono avere vite indipendenti o chiudere le linee rappresentative su se stesse con reciproca estinzione per l'inizio di una nuova linea.