SOLUZIONI PER UNO SPAZIO σ TRIDIMENSIONALE

Conviene qui riportare le equazioni a cui dar forma nello spazio tridimensionale ed esse sono:

$$-r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = f_{k0}(Q)\, g_{k0}(R) + f_{k1}(Q)\, g_{k1}(R) + \cdots\cdots f_{kn}(Q)\, g_{kn}(R) \qquad 26)$$

$$\int_\sigma g_{ki}(P)\, f_{kj}(P)\, d\sigma_P = \delta_{ij} \qquad 27)$$

La 27) in uno spazio tridimensionale si scrive come un integrale di volume, nullo per $i \neq j$, $\int_\sigma g_{ki}(P)\, f_{kj}(P)\, d\sigma_P = 0$ da estendersi a tutto lo spazio e da calcolarsi in un sistema di coordinate inizialmente arbitrario.

Se P è localizzato da un sistema di coordinate in cui le funzioni ortogonali $g_{ki}(P)$ e $f_{kj}(P)$ sono state calcolate, l'ortogonalità del sistema di funzioni ovvero la nullità dell'integrale 27) per $i \neq j$ si estende a tutti i sistemi di coordinate, mentre per $i = j$ sono possibili le trasformazioni per cui l'integrale non diverge e consente una nuova normalizzazione.

La teoria delle equazioni integrali lineari, conducente alle funzioni ortogonali che ci si prefigge di calcolare, fa solo uso dell' operatore di integrazione definita nello spazio di Mach, mentre utilizza solo nello spazio di Gödel tutti gli operatori della teoria delle funzioni analitiche.

Allora l'integrazione definita è espandibile a tutte le entità matematiche per le quali sono definite somma e prodotto, avendo cura di non invertire gli operandi in quest'ultimo.

Il residuo $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$ è somma di prodotti $f_{ki}(Q) \cdot g_{ki}(R)$ calcolate nei punti Q ed R, ma la forma delle funzioni f e g si dedurrà dalla condizione di ortogonalità che riguarda un solo punto variabile P come mostra la 27).

Per l'uso di tale condizione sono irrilevanti quelle modifiche dei fattori dell'integrando della 27) che lasciano costante ciascun prodotto, e sarà facile in seguito ritornare al sistema biortogonale $[f_{ki}, g_{ki}]$ anche se ora si cerca nella classe delle funzioni di quadrato integrabile una sola funzione $F_i(P)$ riferita all'istante (k,0) tralasciato nell'indice, tale che

$$\int_\sigma F_i^2(P)\, d\sigma = 1 \qquad 56)$$

e valga la relazione di ortogonalità:

$$\int_\sigma F_i(P) \cdot F_j(P)\, d\sigma_P = 0 \qquad \text{per } i \neq j \qquad 57)$$

Attribuiendo alle coordinate u,v,w il significato di coordinate generali per individuare il punto P, la 57) può scriversi come:

$$\int_{i_u} du \int_{i_v} dv \int_{i_w} F_i(u,v,w) \cdot F_j(u,v,w)\, dw = 0 \qquad 58)$$

dove i_u è un intevallo fisso, i_v è limitato tra due funzioni di u e i_w da due funzioni di u e v.

Se |D| è il determinante jacobiano della trasformazione di coordinate da (u,v,w) a (ρ,θ,ϕ) che muta il precedente dominio d'integrazione σ in un prisma rettangolare, l'integrale 58) diventa:

$$\int_{i_\rho} d\rho \int_{i_\theta} d\phi \int_{i_\phi} F_i[u(\rho,\theta,\phi),v(\rho,\theta,\phi),w(\rho,\theta,\phi)] \cdot F_j[u(\rho,\theta,\phi),v(\rho,\theta,\phi),w(\rho,\theta,\phi)] \cdot |D| \cdot d\theta = 0 \qquad 59)$$

in cui i tre intervalli di integrazione i_ρ , i_θ , i_ϕ sono fissi e indipendenti.

Poiché $F_i[u(\rho,\theta,\phi),v(\rho,\theta,\phi),w(\rho,\theta,\phi)]$ e $F_j[u(\rho,\theta,\phi),v(\rho,\theta,\phi),w(\rho,\theta,\phi)]$ sono funzioni di ρ,θ,ϕ a cui bisogna ancora dare una forma, si può mantenere il nome F_i alla nuova funzione ponendo:

$$F_i(\rho,\theta,\phi) = \sqrt{|D|} \cdot F_i[u(\rho,\theta,\phi),v(\rho,\theta,\phi),w(\rho,\theta,\phi)]$$

Anche se non può dimostrarsi sempre possibile il calcolo dell'integrale 59) in termini di funzioni elementari, questo assume la forma semplificata:

$$\int_{i_\rho} d\rho \int_{i_\theta} d\phi \int_{i_\phi} F_i(\rho,\theta,\phi) \cdot F_j(\rho,\theta,\phi)\, d\theta = \int_a^b d\rho \int_c^d d\phi \int_e^f F_i(\rho,\theta,\phi) \cdot F_j(\rho,\theta,\phi)\, d\theta = 0 \qquad 60)$$

per $i \neq j$

Qualsiasi sia il sistema di coordinate, si impone che almeno una delle tre integrazioni dia risultato nullo per $i \neq j$ e che per $i = j$ diano risultato diverso da zero tutte.

E' allora possibile cercare la soluzione tra i polinomi ortogonali, che per loro natura sono già ortogonali ad ogni combinazione lineare di polinomi di grado inferiore.

Per un sistema di coordinate polari in cui l'intervallo (a,b) diventa $(0,\infty)$, (c,d) si muta in $(0,\pi)$ ed (e,f) in $(-\pi,\pi)$, si può cercare un integrando che risolva il problema rispettando le 56) e 60) , e quindi tale che l'integrale 27) assuma la forma:

$$\int_0^{\infty} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} F_i(\rho,\theta,\phi)\cdot F_j(\rho,\theta,\phi)\, d\theta = \delta_{ij} \qquad 61)$$

Essendo noto che i polinomi di Laguerre $L_i^{\alpha}(\rho)$ (**Appendice 7**) sono ortogonali sull'intervallo $(0,\infty)$ con peso $e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha}$, l' eguaglianza 61) può trasformarsi in:

$$C_\alpha^{i,j}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha} L_i^{\alpha}(\rho) L_j^{\alpha}(\rho)\, d\rho = 0 \qquad \text{per} \quad i\neq j \quad \text{e in:}$$

$$C_\alpha^{j,j}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha} \left[L_j^{\alpha}(\rho)\right]^2 d\rho = 1 \qquad \text{per} \quad i=j \quad \text{oppure nella forma:}$$

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{\rho}{2}}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}} L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_\alpha^{j,j}}\right]\cdot\left[e^{-\frac{\rho}{2}}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}} L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_\alpha^{j,j}}\right] d\rho = 1 \qquad \text{per} \quad i=j \qquad 62)$$

con $C_\alpha^{i,j}$ costante finita arbitraria quando $i\neq j$, come consente la prima delle 62), mentre per la seconda delle 62) cioè per i=j la stessa costante ha il valore definito:

$$C_\alpha^{j,j} = \frac{j!}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \qquad 63)$$

Dal confronto della 61) scritta per i = j con la 62) si deduce:

$$\int_0^{\infty} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} \left[F_j(\rho,\theta,\phi)\right]^2 d\theta = C_\alpha^{j,j} \int_0^{\infty} e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha}\left[L_j^{\alpha}(\rho)\right]^2 d\rho = 1 \qquad \text{e poi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} \left[F_j(\rho,\theta,\phi)\right]^2 d\theta = e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha}\left[L_j^{\alpha}(\rho)\right]^2\cdot C_\alpha^{j,j} \qquad 64)$$

Risolvendo per ora il caso in cui il parametro $\alpha = \underline{\alpha}$ è indipendente da θ e ϕ ed è una costante con valori compresi tra $-\pi$ e π, si restringerà lo studio alle strutture sferiche ed in tal caso le funzioni di ρ contenenti α hanno il ruolo di parametri che attraversano i segni di integrazione in $d\phi$ e $d\theta$.

Posto allora: $F_j(\rho,\theta,\phi) = e^{-\frac{\rho}{2}}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\cdot G_j(\theta,\phi)$ la 64) si scrive nella forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi}\left[e^{-\frac{\rho}{2}}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\cdot G_j(\theta,\phi)\right]^2 d\theta = e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha}\left[L_j^{\alpha}(\rho)\right]^2\cdot C_{\alpha}^{j,j}$$

ovvero:
$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi}\left[G_j(\theta,\phi)\right]^2 d\theta = 1 \qquad 65)$$

L'integrando della terza delle 62) è costituito di due fattori uguali per corrispondere alla semplicità della 56), ma il peso $e^{-\rho}\cdot\rho^{\alpha}$ può essere spartito tra i due fattori della 62) in modo dissimetrico complicando un po' la scrittura, ma costituendo un sistema di funzioni biortogonali prima indicate con f_{ki} e g_{ki}.

$$\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{\rho}{2}+a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}+b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]\cdot\left[e^{-\frac{\rho}{2}-a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}-b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]d\rho = 1 \qquad 66)$$

L'analogo al passaggio tra 64) e 65) si attua facendo le due posizioni:

$$f_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \left[e^{-\frac{\rho}{2}+a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}+b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]\cdot G_j^{+}(\theta,\phi) \qquad 67)$$

$$g_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \left[e^{-\frac{\rho}{2}-a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}-b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]\cdot G_j^{-}(\theta,\phi) \qquad 68)$$

Con queste posizioni, alla 65) corrisponde:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} G_j^{+}(\theta,\phi)\cdot G_j^{-}(\theta,\phi)\, d\theta = 1 \qquad 69)$$

Gli integrali 65) e 69) sono integrali sulla superficie di una sfera unitaria e i loro l'integrandi possono essere espressi mediante funzioni associate di Legendre $P_j^h(\cos\theta)$ (**Appendice 8**) e da funzioni sferiche di ordine j.

Per comprendere come si possa fare ciò, si inizia con l'introdurre i polinomi di Legendre attraverso la formula di Rodriguez:

$$P_j(x) = \frac{(-1)^j}{2^j\cdot j!}\cdot\frac{d^j}{dx^j}\left[(1-x^2)^j\right] = \frac{1}{2^j\cdot j!}\cdot\frac{d^j}{dx^j}\left[(x^2-1)^j\right]$$

e successivamente le funzioni associate mediante le equazioni:

$$P_j^h(x) = (1-x^2)^{\frac{h}{2}} \cdot \frac{d^h}{dx^h}[P_j(x)] = \frac{(-1)^j (1-x^2)^{\frac{h}{2}}}{2^j \cdot j!} \cdot \frac{d^{j+h}}{dx^{j+h}}[(1-x^2)^j] = \frac{(1-x^2)^{\frac{h}{2}}}{2^j \cdot j!} \cdot \frac{d^{j+h}}{dx^{j+h}}[(x^2-1)^j]$$

da cui si deduce che: $P_j^0(x) = P_j(x)$ e ciò fa coincidere la derivata di ordine zero con la funzione stessa, mentre impone che sia: $h+j \geq 0$.

Dalla definizione di $P_j^h(x)$ si deduce immediatamente che l'ordine di derivazione j+h non può superare 2j che è il grado del polinomio $(x^2-1)^j$ ovvero deve essere $h \leq j$.

Le due diseguaglianze precedenti si riuniscono nella condizione:

$$-j \leq h \leq j \qquad 70)$$

Per le funzioni di Legendre associate valgono, le seguenti proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-1}^{1} P_i^h(x) P_j^h(x)\,dx = 0 \qquad \text{per } i \neq j \qquad 71)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2} \cdot P_j^h(x) P_j^k(x)\,dx = 0 \qquad \text{per } h \neq k \qquad 72)$$

$$\int_{-1}^{1} P_j^h(x) P_j^k(x)\,dx = 0 \qquad \text{per } (-1)^h \neq (-1)^k \qquad 73)$$

ovvero quando è $h \neq k \pm 2q$ con q intero.

La 73) è una generalizzazione della 71) nel senso che ammette integrali non nulli del tipo:

$$\int_{-1}^{1} P_j^h(x) P_j^k(x)\,dx \neq 0 \qquad 74)$$

non solo quando $h = k$, ma anche quando $h = k \pm 2q$ con q intero.

Il valore di questo integrale, quando h e k vengono rispettivamente sostituite da m-q e da m+q è dato da:

$$\int_{-1}^{1} P_j^{m-q}(x) \cdot P_j^{m+q}(x)\,dx = \Sigma\begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} \qquad 75)$$

dove

$$\Sigma\begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} = \frac{(j+m-q)! \cdot (j+m+q)! \cdot m!}{2^{2j} \cdot (j!)^2} \cdot \sum_{i=0}^{\mathrm{int}\left[\frac{j-m+q}{2}\right]} \sum_{h=0}^{\mathrm{int}\left[\frac{j-m-q}{2}\right]} \frac{(-1)^{i+h} \binom{j}{i}\binom{j}{h}\binom{2j-2i}{j+m-q}\binom{2j-2h}{j+m+q}}{(j-i-h+\frac{1}{2})(j-i-h+\frac{1}{2}-1)\cdots(j-i-h+\frac{1}{2}-m)}$$

(**Appendice 9**) che per q=0 porta alla nota formula per il quadrato della norma del prodotto scalare:

$$\int_{-1}^{1} P_j^m(x)\cdot P_j^m(x)dx = \frac{2}{2j+1}\cdot\frac{(j+m)!}{(j-m)!} \qquad 76)$$

Il calcolo dell' integrale definito espresso dalla 76) porta alla forma:

$$\int_{-1}^{1}[P_j^m(x)]^2\,dx = \frac{2}{2j+1}\cdot\frac{(j+m)!}{(j-m)!} = \int_{0}^{\pi}[P_j^m(\cos\theta)]^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad 77)$$

quando si fa la sostituzione $x = \cos\theta$ e la stessa sostituzione nella 75) conduce a:

$$\int_{-1}^{1} P_j^{m-q}(x)\cdot P_j^{m+q}(x)dx = \sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} = \int_{0}^{\pi} P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad 78)$$

L'equazione 77) è un caso particolare della 78) per $q = 0$, in cui $\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{2j+1}\cdot\frac{(j+m)!}{(j-m)!}$

ed in seguito converrà considerare solo quest'ultima.

Bisogna ora considerare un secondo angolo ϕ per esplorare la sfera unitaria.

Ad ogni funzione $f(\phi)$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)^2 d\phi$ converga si possono associare quelle di θ e ϕ espresse da

$P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot f(\phi)$ e $P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot f(\phi)$ in modo tale che la 78) si trasformi nella:

$$\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)^2 d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} f(\phi)\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot f(\phi)\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad 79)$$

e l'integrale della 79) risulti calcolato sulla superficie sferica S di raggio unitario e di elemento d'area $dS = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ e sia dato da:

$$\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)^2 d\phi = \int\int_{S} f(\phi)\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot f(\phi)\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\, dS$$

Poiché $f(\phi)$ può essere sviluppata in serie di Fourier nella forma:

$$f(\phi) = \sum_{0}^{\infty}{}_k A_k\cos(k\phi-\lambda_k) \qquad \text{con} \qquad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\cos(k\phi-\lambda_k)d\phi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)^2 d\phi = \sum_{0}^{\infty}{}_k A_k^2 \int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\phi-\lambda_k)^2 d\phi = \sum_{0}^{\infty}{}_k A_k^2\cdot\pi$$ converge per ipotesi ad un valore finito.

Per semplicità di scrittura si può considerare solo il caso in cui $f(\phi)$ coincida con la sua armonica di ordine h e l'ampiezza A_h sia uguale ad 2, conducendo alle relazioni:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)^2 d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} f_h(\phi)^2 d\phi = 4\pi \qquad ; \qquad f(\phi) = f_h(\phi) = 2\cos(h\phi-\lambda_h) = 2\cos(h\phi-\lambda)$$

essendo λ un angolo di fase arbitrario ininfluente nell'integrazione sull'intervallo $(-\pi,\pi)$

In tal caso la 79) diventa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot 2\cos(h\phi-\lambda)\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot 2\cos(h\phi-\lambda)\cdot \mathrm{sen}\theta\, d\theta = 4\pi\cdot\Sigma \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} \qquad 80)$$

che può anche scriversi come:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot(e^{i(h\phi-\lambda)}+e^{-i(h\phi-\lambda)})\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot(e^{i(h\phi-\lambda)}+e^{-i(h\phi-\lambda)})\mathrm{sen}\theta d\theta = 4\pi\cdot\Sigma \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}$$

Posto $\lambda = 0$ scegliendo opportunamente l'origine della fase, la 80) diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot(e^{ih\phi}+e^{-ih\phi})\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot(e^{ih\phi}+e^{-ih\phi})\mathrm{sen}\theta d\theta = 4\pi\cdot\Sigma \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} \qquad 81)$$

Una qualsiasi combinazione di segni agli esponenti della funzione integranda fa assumere lo stesso valore all'integrale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot \mathrm{sen}\theta d\theta = \pi\cdot\Sigma \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} \qquad 82)$$

Per indici inferiori diversi per le funzioni di Legendre continua a valere la:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m}(\cos\theta)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_n^{m}(\cos\theta)\cdot \mathrm{sen}\theta d\theta = 0$$

Poiché il segno dell'esponente per la funzione $e^{\pm ih\phi}$ indica un senso di rotazione, e una struttura sferica può essere osservata dal polo nord o dal polo sud, dell'integrando della formula 82) esistono solo due forme distinte: quella a segni uguali degli esponenti e quella a segni diversi.

Nella forma a segni diversi si può osservare la struttura in modo da associare l'esponente negativo alla funzione di Legendre $P_j^{m-q}(\cos\theta)$ per ottenere:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{-ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot e^{+ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot \mathrm{sen}\theta d\theta = \pi\cdot\Sigma \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix} \qquad 83)$$

Due forme particolari dell'integrando della 69) qui riportata

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} G_j^{+}(\theta,\phi)\cdot G_j^{-}(\theta,\phi)\, d\theta = 1$$

si possono dare con le eguaglianze:

$$G_j^{-}(\theta,\phi) = \frac{e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta}}{\sqrt{\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}} \quad ; \qquad G_j^{+}(\theta,\phi) = \frac{e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta}}{\sqrt{\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}}$$

Con l'uso di queste eguaglianze le formule 67) e 68) diventano:

$$f_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \left[e^{-\frac{\rho}{2}+a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}+b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]\cdot \frac{e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta}}{\sqrt{\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}} \qquad 84)$$

$$g_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \left[e^{-\frac{\rho}{2}-a}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}-b}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot\sqrt{C_{\alpha}^{j,j}}\right]\cdot \frac{e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta}}{\sqrt{\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}} \qquad 85)$$

Chiamato il coefficiente di normalizzazione $A\begin{pmatrix} \alpha \\ j \\ m \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{\dfrac{C_{\alpha}^{j,j}}{\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}} =$

$$= \sqrt{\frac{j!}{\Gamma(\alpha + j + 1)\cdot\pi\cdot\sum \begin{pmatrix} j \\ m \\ q \end{pmatrix}}}$$

le precedenti relazioni 84) e 85) assumono la forma:

$$f_{kj}(\rho,\theta,\phi) = A\begin{pmatrix} \alpha \\ j \\ m \\ q \end{pmatrix}\cdot e^{-\frac{\rho}{2}+a(k)}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}+b(k)}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta} \qquad 86)$$

$$g_{kj}(\rho,\theta,\phi) = A\begin{pmatrix} \alpha \\ j \\ m \\ q \end{pmatrix}\cdot e^{-\frac{\rho}{2}-a(k)}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}-b(k)}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot\sqrt{\mathrm{sen}\theta} \qquad 87)$$

La dipendenza dall'istante reale k può avvenire solo attraverso gli esponenti arbitrari a e b.

Il fattore $\mathrm{sen}\theta$ della 83) può essere spartito in modo dissimetrico tra le funzioni $G_j^{+}(\theta,\phi)$ e $G_j^{-}(\theta,\phi)$ scrivendo: $\mathrm{sen}\theta = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

Una nuova forma delle 86) e 87) è espressa da:

$$f_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \sqrt{2}\cdot A\begin{pmatrix} \alpha \\ j \\ m \\ q \end{pmatrix}\cdot e^{-\frac{\rho}{2}+a(k)}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}+b(k)}\, L_j^{\alpha}(\rho)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot\cos\frac{\theta}{2} \qquad 88)$$

$$g_{kj}(\rho,\theta,\phi) = \sqrt{2}\cdot A\binom{\alpha}{j}\binom{m}{q}\cdot e^{-\frac{\rho}{2}-a(k)}\cdot\rho^{\frac{\alpha}{2}-b(k)}\,L_j^{\alpha}(\rho)\cdot e^{\pm ih\phi}\cdot P_j^{m-q}(\cos\theta)\cdot sen\frac{\theta}{2} \qquad 89)$$

Dando all'indice j successivamente i valori tra 0 ed n si ottengono gli addendi della 26), quando si suppongano assegnate a Q le coordinate ρ,θ,ϕ e ad R le coordinate $\underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}$.

$$f_{kj}(\rho,\theta,\phi)\cdot g_{kj}(\underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}) =$$

$$= 2\cdot\frac{C_{\alpha}^{j,j}}{\pi\cdot\sum_j\binom{m}{q}}\cdot e^{-\frac{\rho+\underline{\rho}}{2}}\cdot(\rho\underline{\rho})^{\frac{\alpha}{2}}\cdot L_j^{\alpha}(\rho)\cdot L_j^{\alpha}(\underline{\rho})\cdot e^{\pm ih(\phi+\underline{\phi})}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot P_j^{m-q}(\cos\underline{\theta})\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot sen\frac{\underline{\theta}}{2}$$

La risposta alla domanda iniziale di dar forma al residuo $r_k\begin{pmatrix}Q\\ R\end{pmatrix}$ è quindi:

$$-r_k\begin{pmatrix}\rho,\theta,\phi\\ \underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} f_{kj}(\rho,\theta,\phi)\cdot g_{kj}(\underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} 2\cdot\frac{C_{\alpha}^{j,j}}{\pi\cdot\sum_j\binom{m}{q}}\cdot e^{-\frac{\rho+\underline{\rho}}{2}}\cdot(\rho\underline{\rho})^{\frac{\alpha}{2}}\cdot L_j^{\alpha}(\rho)\cdot L_j^{\alpha}(\underline{\rho})\cdot e^{\pm ih(\phi+\underline{\phi})}\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot P_j^{m-q}(\cos\underline{\theta})\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot sen\frac{\underline{\theta}}{2}$$

Il fattore $2\cdot e^{\pm ih(\phi+\phi_1)}$ è l'unico che può essere dipendente dal tempo supposto che sia $h = h(\tau)$, e siccome il residuo $r_k\begin{pmatrix}\rho,\theta,\phi\\ \underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}\end{pmatrix}$ è soluzione di un'equazione integrale lineare, è ancora soluzione la funzione reale contenente il fattore $\cos[\,h(\phi+\phi_1)]$ combinazione lineare delle due forme del fattore precedente. La forma definitiva del residuo è allora:

$$-r_k\begin{pmatrix}\rho,\theta,\phi\\ \underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} f_{kj}(\rho,\theta,\phi)\cdot g_{kj}(\underline{\rho},\underline{\theta},\underline{\phi}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{C_{\alpha}^{j,j}}{\pi\cdot\sum_j\binom{m}{q}}\cdot e^{-\frac{\rho+\underline{\rho}}{2}}\cdot(\rho\underline{\rho})^{\frac{\alpha}{2}}\cdot L_j^{\alpha}(\rho)\cdot L_j^{\alpha}(\underline{\rho})\cdot\cos[\,h(\phi+\phi_1)]\cdot P_j^{m+q}(\cos\theta)\cdot P_j^{m-q}(\cos\underline{\theta})\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot sen\frac{\underline{\theta}}{2}$$