Composizione dei moti nella relatività speciale

La formula 25) del testo **"Il principio di Mach...."** $\int_{\sigma} r_k\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot r_h\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma = 0$ per $h \neq k$

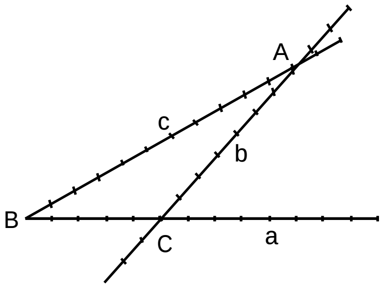
afferma che i residui relativi ai due diversi istanti h e k sono ortogonali e ciò non significa una indipendenza istantanea e locale, ma una indipendenza in grande, cioè non è detto che $r_{k+1}\left(\frac{Q}{P}\right)$ sia indipendente da $r_k\left(\frac{Q}{P}\right)$, ma l'effetto complessivo dei valori assunti dai residui relativi agli istanti precedenti è nullo.

La formula 24) $-r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = \int_{\sigma} r_k\left(\frac{Q}{P}\right) r_k\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P$ assicura invece una relazione tra i residui relativi allo stesso istante in punti spazialmente distinti in σ e solo tra essi.
Che significato ha lo stesso istante reale in punti spazialmente distinti?
Si constaterà alla fine di questo lavoro che gli istanti in punti spazialmente distinti differiscono per una componente immaginaria del tempo, perché questa diventa la variabile che distingue nel punto Q di σ le varie provenienze dell'informazione locale dai diversi punti P.
Si è già visto che la traslazione dello zero temporale lungo gli interi dell'asse reale non modifica l'informazione globale da complessità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{-\tau}}{\Gamma(1-\tau)} d\tau$$

e quindi la scelta dello zero è arbitraria purché su un intero.

Nel citato testo si era fatta l'ipotesi altrettanto arbitraria di collocare le singolarità di $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau\right)$ e zeri di $D(\tau)$ sugli interi del semiasse reale positivo del tempo e questo è un modo per dichiarare costante il moto degli orologi, ma, complicando le formule, avrebbero potuto essere collocati ancora equidistanti su una qualsiasi retta inclinata che fosse asse delle ascisse di un nuovo piano temporale ruotato (che un altro osservatore usa per descrivere una fisica identica alla prima), oltre che su una qualsiasi linea regolare.
Tralasciando quest'ultimo caso, si possono considerare ora le sole trasformazioni lineari.
Ovviamente i piani temporali che hanno in comune l'asse reale mentre gli assi immaginari appartengono ad un piano perpendicolare ad esso conducono a leggi fisiche identiche.
La trasformazione successiva in ordine di complicazione è quella in cui gli assi reali temporali appartenenti ad un certo piano si incrociano con angoli scelti dai diversi osservatori due dei quali sincronizzano i loro zeri temporali all'incrocio dei rispettivi assi, e provano a tracciare sul piano del tempo delle coordinate polari.
Se tre osservatori a, b, c, che hanno identiche leggi fisiche e quindi suppongono identici gli intervalli fra gli zeri di $D(\tau)$ tentano di sincronizzare i loro zeri temporali, (in C lo zero di a coincide con lo zero di b) possono farlo solo costruendo triangoli i cui lati abbiano rapporti di lunghezze espressi da numeri razionali come si vede in figura, ma un quarto osservatore non può più sincronizzarsi con gli altri tre.



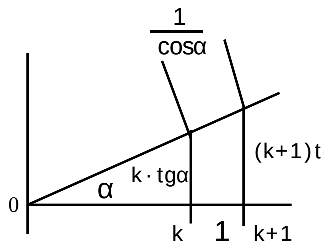
E' quindi necessario rinunciare al fatto che ciascun osservatore veda gli intervalli unitari suoi uguali a quelli degli altri ed è pure necessaria la rinuncia alle coordinate polari con origine nel punto in cui si sincronizzano due osservatori.

Inoltre, siccome esistono relazioni solo tra residui con lo stesso valore di k, ciascun osservatore che ha disposto gli zeri di D(τ) sul suo asse reale potrà trarre informazione solo da residui che percepisce disposti sulla parallela all'asse immaginario passante per k.

L'aver fissato k corrisponde all'aver fissata una parallela all'asse immaginario sul piano del tempo, che, con tale operazione eseguita per ogni k, risulta tagliato da un'infinità di rette parallele passanti per gli interi del semiasse reale positivo e ad esso perpendicolari che tagliano a loro volta una qualsiasi retta inclinata di un angolo α (compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ estremi esclusi) su cui un altro osservatore ha disposto i suoi zeri di D(τ).

Siccome questa operazione è possibile per un numero arbitrario di osservatori ovvero di angoli α e con un'origine altrettanto arbitraria sugli interi, il problema della sincronizzazione è risolto in generale e non solo per opportuni angoli.

In tal caso ciascun osservatore vede tagliate delle lunghezze temporali u dipendenti da α su ogni retta inclinata che è asse reale dei tempi di un altro osservatore.



Come si vede dalla precedente figura, posto $\text{sen}\alpha = \beta$ con $-1< \beta <1$, le rette sul piano del tempo per ogni reale intero k tagliano sull'altra ascissa temporale inclinata dei segmenti di lunghezza

$$u = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Del parametro β non è possibile dare l'interpretazione che dà la relatività ristretta, perché le velocità dei corpi potranno essere definite solo in certi punti di un segmento e non in modo continuo, ma, sia la relazione tra un intervallo temporale unitario e il suo trasformato, sia il campo di variabilità di β sono coincidenti.

L'osservatore che ha disposto i suoi zeri di D(τ) sul suo asse reale deve allora calcolare i residui della risolvente del secondo osservatore che gli appaiono disposti nei punti $\left(1+i\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)k$.

Posto $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma = tg\alpha$, la funzione $D_\gamma(\tau) = \frac{z^{-\frac{\tau}{1+i\gamma}}}{\Gamma[1-\frac{\tau}{1+i\gamma}]}$ ha certamente gli zeri nei punti richiesti cioè dove $\tau = (1+i\gamma)k$, ma può essere un determinante di Fredholm solo se si riescono a trovare dei nuovi valori delle tracce A_k indicate con un asterisco che, introdotti nella serie 6) del testo **"Il principio di Mach...."**, forniscano una somma finita della serie che esprime il determinante di Fredholm della forma:

$$D_\gamma(\tau) = \frac{z^{-\frac{\tau}{1+i\gamma}}}{\Gamma[1-\frac{\tau}{1+i\gamma}]} = e^{-(A_1^*\tau + A_2^*\frac{\tau^2}{2} + A_3^*\frac{\tau^3}{3} + \cdots A_k^*\frac{\tau^k}{k} + \cdots)}$$

Ciò può essere fatto ponendo $\frac{\tau}{1+i\gamma} = y$ e riscontrando che $D_\gamma(\tau) = D(y)$ quando è $\tau = (1+i\gamma)k$

Successivamente, rifacendo i passaggi esposti nelle **appendici 2)** e **1)** con y al posto di τ,

si giunge così alla formula: $$D(y) = e^{-[A_1 y + \zeta(2)\frac{y^2}{2} + \zeta(3)\frac{y^3}{3} + \cdots \zeta(n)\frac{y^n}{n} + \cdots]}$$

Con la posizione fatta per y si ritorna alla funzione di τ:

$$D_\gamma(\tau) = e^{-[\frac{A_1}{1+i\gamma}\tau + \frac{\zeta(2)}{(1+i\gamma)^2}\frac{\tau^2}{2} + \frac{\zeta(3)}{(1+i\gamma)^3}\frac{\tau^3}{3} + \cdots\cdots \frac{\zeta(n)}{(1+i\gamma)^n}\frac{\tau^n}{n} + \cdots\cdots]}$$

Risulta quindi che per la generica traccia A_h con $h > 1$, tralasciando l'asterisco, si dovrà porre

$$A_h = \frac{\zeta(h)}{(1+i\gamma)^h} = \zeta(h)\left[\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}+i\beta}\right]^h = \zeta(h)\left[\sqrt{1-\beta^2}\cdot(\sqrt{1-\beta^2}-i\beta)\right]^h =$$

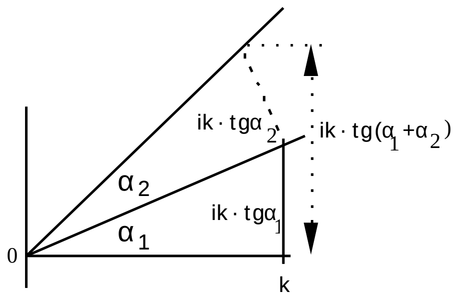
$$= \zeta(h)\left[\cos\alpha\cdot(\cos\alpha - i\cdot sen\alpha)\right]^h = \zeta(h)\left[\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}\right]^h = \zeta(h)\left[\sqrt{1-\beta^2}\cdot e^{-i\alpha}\right]^h$$

per avere gli zeri di $D_\gamma(\tau)$ sulla retta passante per la comune origine del piano temporale ed inclinata di un angolo α , sebbene la loro posizione sia quella rilevata dal primo osservatore.

Il rapporto tra due tracce successive risulta, rispetto alle precedenti, moltiplicato per la costante $\frac{1}{1+i\gamma}$ indipendente dalla variabile dello spazio σ in cui le tracce sono state definite [confr. formula 5) del testo].

Così la trasformazione $\frac{A^*_{h+1}}{A^*_h} = \frac{A_{h+1}}{A_h}\cdot\frac{1}{1+i\gamma} = \frac{A_{h+1}}{A_h}\cdot\cos\alpha\cdot e^{-i\alpha}$ è semplicemente di misura.

Stabilito che le unità di misura delle componenti reali del tempo per due osservatori che dispongono gli zeri di $D(\tau)$ su rette reciprocamente inclinate di un angolo α si trasformano per mezzo della funzione pari $\frac{1}{\cos\alpha}$ secondo lo schema rappresentato in figura, bisogna chiedersi come sia possibile trasferire le osservazioni fatte su un moto rispetto al secondo osservatore in termini di grandezze del primo.
Si può usare la notazione già introdotta, $\mathrm{sen}\alpha = \beta$ e $\mathrm{tg}\alpha = \gamma$ con opportuni indici per attribuire la misura ad un osservatore e alla percezione di questa dal secondo .



L'osservatore che ha disposto gli zeri di $D(\tau)$ sull'asse orizzontale della figura vede il k^{mo} zero di quello che ha disposto i suoi sulla retta inclinata dell'angolo α_1 nel punto $k(1+i\gamma_1) = k(1+i\cdot\mathrm{tg}\alpha_1)$ del piano complesso τ.
Un ulteriore moto uniforme con zeri collocati su una retta inclinata di un angolo α_2 (gli angoli restano invariati dall'origine per la linearità della trasformazione) rispetto a quella del secondo osservatore e quindi di $\alpha_1 + \alpha_2$ rispetto all'orizzontale del primo, propone la trasformazione della componente immaginaria di τ misurata da uno in quella misurata dall'altro osservatore.
Ponendo $s_{32} = ik\cdot\mathrm{tg}\alpha_2$, $s_{21} = ik\cdot\mathrm{tg}\alpha_1$ e $s_{31} = ik\cdot\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)$ si ottiene:

$$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_1+\mathrm{tg}\alpha_2}{1-\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\mathrm{tg}\alpha_2} = \frac{s_{31}}{ik} = \frac{\frac{s_{32}}{ik}+\frac{s_{21}}{ik}}{1-\frac{s_{32}}{ik}\cdot\frac{s_{21}}{ik}} \qquad \text{da cui} \quad s_{31} = \frac{s_{32}+s_{21}}{1+\frac{s_{32}s_{21}}{k^2}}$$

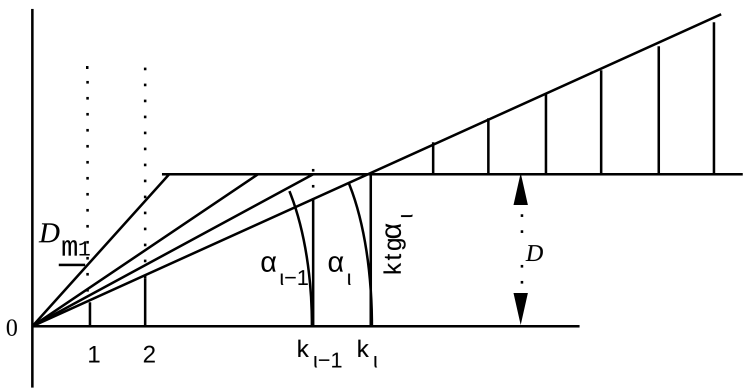
per $k = 1$ ed $\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ i coefficienti degli immaginari dell'ultima formula sono $s_{32} = s_{21} = 1$ e da ciò si deduce che anche $s_{31} = 1$ e l'angolo $\frac{\pi}{4}$ diventa insuperabile.

Dando per $k = 1$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alle s_{ik} il significato di distanze massime percorribili nell'unità di tempo, si definisce una velocità massima unitaria e per α generico una legge di composizione che è quella della relatività ristretta.

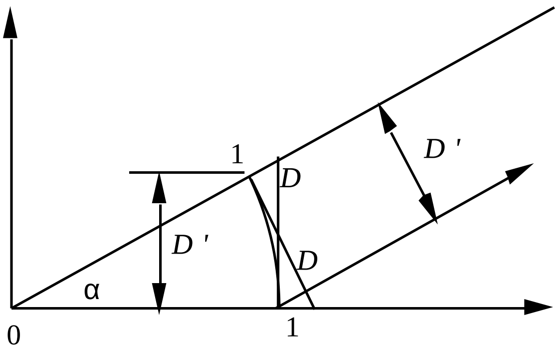
$$v_{31} = \frac{v_{32}+v_{21}}{1+v_{32}v_{21}} \qquad \text{oppure in unità ordinarie} \quad v_{31} = \frac{v_{32}+v_{21}}{1+\frac{v_{32}v_{21}}{c^2}}$$

Queste formule sono analoghe a quelle del gruppo di rotazioni di Lorentz in cui s è reale e τ è il coefficiente dell'unità immaginaria.
L'analogia resta però incompleta per due ragioni: la prima riguarda il carattere discreto delle formule ora ricavate, mentre la teoria della relatività opera nel continuo; la seconda invece riguarda un doppio significato del termine "distanza".
Oltre alla "distanza" come componente immaginaria del tempo, nel presente schema c'è una definizione divergente dalla prima, mentre nella fisica classica e in quella relativistica le due definizioni sono confuse.
Introduciamo ora la diversa definizione.
Partiamo con il supporre che si possa avere un raccordo tra l'equazione integrale omogenea con zeri di $D(\tau)$ sull'asse reale e quella per gli zeri su rette inclinate di un angolo α che un solo osservatore può scegliere modificando il suo stato, ma la modifica di stato non equivale al caso in cui due osservatori dello stesso fenomeno abbiano già rette degli zeri distinte.
Anche la relatività ristretta si occupa solo quest'ultimo caso.
Nello schema del discreto però questo secondo caso comporta che l'insieme delle rette inclinate di un angolo α su cui il primo osservatore può vedere disposti gli zeri di un secondo, coincida con quello delle rette che passano per i suoi interi reali.
Siccome l'effetto dell'aggiunta di un termine noto completamente arbitrario all'equazione omogenea di Fredholm espimente il principio di Mach, che descriveva lo stato di un solo osservatore con zeri di $D(\tau)$ sull'asse reale fino a $\tau = k$, è quello di traslare il successivo zero nella direzione dell'asse immaginario su una retta che generalmente non appartiene all'insieme, il primo caso comporta una risincronizzazione ovvero una ricaduta su una retta appartenente a questo.
Lo studio della risincronizzazione non riguarda le analogie con la relatività ristretta, ma per ora è solo necessario che una risincronizzazione sia possibile.
Il risultato cambia solo quantitativamente quando il termine noto non nullo è presente in successivi intervalli unitari, ma in ogni caso dopo la modifica della direzione cioè quando la descrizione dello stato ritorna all'equazione omogenea nella variabile finale, la retta deve ricadere tra quelle dell'insieme di angolo α risincronizzando il cambiamento dovuto al moto.
Se la rotazione di un angolo α con risincronizzazione è la prima delle almeno tre operazioni per la definizione dell'altra "distanza D ", la seconda è quella dell'attesa di una modifica della distanza s definita prima come risultato del moto.
La terza operazione è uguale alla prima, ma con angolo $-\alpha$ in modo tale da riportare gli zeri di $D(\tau)$ su una retta parallela a quella originaria.
Il complesso delle tre operazioni riporta a collocare gli zeri di $D(\tau)$ ai valori unitari di partenza, ma la loro retta ovvero quella che contiene i punti in cui si calcolano i residui della risolvente è traslata nella direzione immaginaria di un ammontare D costante nel tempo.
Siccome l'angolo α può variare con continuità questa seconda "distanza D " tra la retta degli zeri traslata e l'asse reale del piano temporale è pure una funzione continua di α e non è più funzione del tempo, perché gli intervalli tra gli zeri di $D(\tau)$ sono ritornati quelli originari.
D è allora funzione solo delle coordinate dello spazio σ e in quello ha senso una geometria.
Poiché la scelta dello zero tra gli interi dell'asse temporale reale è arbitraria, il primo parametro da cui dipende la traslazione della retta degli zeri di $D(\tau)$ è l'angolo α che introduce una componente immaginaria del tempo, il secondo parametro k è la durata della seconda operazione dopo la quale il ripristino della direzione originaria si ottiene attraverso la rotazione dell'angolo $-\alpha$ della retta portante

gli zeri ed in ogni caso sono sempre necessari anche se non univoci i tre dati (α,k,-1) per specificare la retta portante gli zeri di D(τ).
Tutti i residui in punti su rette temporali parallele costituiscono un sistema di riferimento materiale tra i cui punti esiste una "distanza D " che prescinde dal tempo ed è quindi una grandezza dello spazio di Mach.
La differenza essenziale tra le due distanze consiste nel fatto che, al contrario di quest'ultima, la distanza definita come componente immaginaria del tempo è il segmento perpendicolare all'asse reale di un osservatore che unisce punti di quest'asse con punti di una retta a tempi unitari dilatati.
E' anche possibile una combinazione di quest'ultima trasformazione in tre passi con quella tra piani complessi ad unico asse reale per ampliare la definizione di "distanza D ".
Poiché per ogni osservatore possono sommarsi residui solo quando i loro punti singolari sono disposti sulla stessa retta parallela all'asse immaginario, la necessaria distinzione dei diversi punti singolari sorgenti di informazione avviene attraverso i valori delle variabili dello spazio di Mach.
Siano Q_1 e Q_2 due punti dello spazio di Mach che localizzino in esso punti singolari a residui sommabili per essere riferiti allo stesso valore reale k di τ .
Indipendentemente dalla difficoltà del passaggio da una condizione di moto ad un'altra nell'istante 0 e di un secondo passaggio alla prima condizione nell'istante k , i residui nei successivi punti interi dell'asse reale tra 0 e k sono funzioni di $y = \dfrac{\tau}{1+i\gamma}$, dopo di che ritornano funzioni di τ .
La descrizione mediante un'equazione in y durante k intervalli unitari è quindi la causa di modifica della localizzazione nello spazio σ del punto singolare facendolo passare da Q_1 a Q_2 e vedendo tutta l'operazione dall'osservatore R.
Per semplicità conviene dapprima considerare uno spazio σ unidimensionale che definisca la distanza geometrica come: $Q_1Q_2 = D = k_i \operatorname{tg} \alpha_i$ dove k_i è un qualsiasi numero intero ed α_i l'angolo associato in modo tale che non muti il valore di Q_1Q_2 .
Vale allora per ogni distanza D tra i punti di σ Q_1 e Q_2 l'equazione $k_i \operatorname{tg} \alpha_i = k_j \operatorname{tg} \alpha_j$
Poiché $\dfrac{k_i}{k_j}$ è un numero razionale anche $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha_j}{\operatorname{tg} \alpha_i}$ deve essere tale, riducendo l'insieme di angoli che a partire dall'istante 0 possono raggiungere una determinata distanza.
Fissata l'origine per ogni distanza D esiste un insieme di angoli associati ai numeri interi che viene estratto dal continuo degli angoli α.



Il modo più rapido per passare da Q_1 a Q_2 è quello che raggiunge la distanza $D = \mathrm{tg}\alpha_M$ secondo la retta di massima pendenza nell'intervallo (01) di tempo reale, ma non è detto che la retta di massima pendenza incroci la retta a distanza D in uno zero di D(τ), perché solo un insieme discreto di angoli ha questa caratteristica.
Le distanze D sono le uniche misurabili, perché caratterizzano dei punti singolari a differenza delle s associabili ad ogni punto del piano τ in cui non esistono punti singolari.
La distanza D che separa due rette del sistema di riferimento materiale di ciascun osservatore viene vista dall'altro contratta in $D' = D\cos\alpha = D\cdot\sqrt{1-\beta^2}$ secondo la figura



La trasformazione che dilata l'intervallo temporale unitario e contrae le distanze D equivale alla trasformazione di Lorentz che lascia inalterate le leggi dell'elettromagnetismo macroscopico.