Appendice 8

Definizione dei polinomi di Legendre mediante formula di Rodriguez

$$P_h(x) = \frac{(-1)^h}{2^h \cdot h!} \cdot \frac{d^h}{dx^h}\left[(1-x^2)^h\right] = \frac{1}{2^h \cdot h!} \cdot \frac{d^h}{dx^h}\left[(x^2-1)^h\right]$$

Funzione generatrice

Per l'analiticità dei polinomi $P_h(x)$, l'uso delle formule di Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-x}\,dz\ ; \quad f^{(h)}(x) = \frac{h!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-x)^{h+1}}\,dz$$

fa scrivere $P_h(x) = \dfrac{1}{2^{h+1}\cdot \pi i}\displaystyle\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+1}}\,dz$

dove c è il cerchio $z = x + r e^{i\phi}$; $r<|x\pm1|$ prolungabile in cammino che esclude e non avvolge i punti +1 e -1.

$$P_h(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \left(\frac{z^2-1}{2(z-x)}\right)^h \frac{dz}{z-x} \qquad 1)$$

Se si pone $\dfrac{z^2-1}{2(z-x)} = \dfrac{1}{w}$ la trasformazione $z \to w$ porta il polo dell'integrando nell'origine de piano complesso w.

I due valori di z corrispondenti al punto w sono le soluzioni di $z^2 - \dfrac{2}{w}\cdot z + \dfrac{2}{w}\cdot x - 1 = 0$

e sono date da: $z = \dfrac{1}{w} \pm \sqrt{\dfrac{1}{w^2} - \dfrac{2}{w}\cdot x + 1} = \dfrac{1}{w}\left(1 \pm \sqrt{w^2 - 2xw + 1}\right)$

e se si sceglie la soluzione per cui: $\sqrt{w^2 - 2xw + 1} = 1$ per w=0 , la trasformazione è biunivoca e lega w e z secondo le relazioni:

$$z = \frac{1}{w}\left(1 - \sqrt{w^2 - 2xw + 1}\right)\ ; \qquad \sqrt{w^2 - 2xw + 1} = 1 - zw$$

La continuità della trasformazione impone che:

$$\lim_{w\to 0} z = \lim_{w\to 0} \frac{1 - \sqrt{w^2 - 2xw + 1}}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{x-w}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} = x$$

e quella della derivata di z(w):

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{w^2}\left(1 - \sqrt{w^2 - 2xw + 1}\,\right) - \frac{1}{w}\cdot\frac{w-x}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}}$$

vuole che sia:

$$\lim_{w\to 0}\frac{dz}{dw} = -\frac{\left(1 - \sqrt{w^2 - 2xw + 1}\,\right) + \dfrac{w^2-xw}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}}}{w^2}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{dz}{dw} = -\frac{-\dfrac{w-x}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} + \dfrac{2w-x}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} - \dfrac{(w-x)(w^2-xw)}{\sqrt{(w^2 - 2xw + 1)^3}}}{2w}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{dz}{dw} = -\frac{\dfrac{2w-x-w+x}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} - \dfrac{(w-x)(w^2-xw)}{\sqrt{(w^2 - 2xw + 1)^3}}}{2w}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{dz}{dw} = -\frac{\dfrac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} - \dfrac{(w-x)(w-x)}{\sqrt{(w^2 - 2xw + 1)^3}}}{2} = \frac{x^2-1}{2}$$

Si possono calcolare le derivate successive in modo tale da poter sviluppare la funzione z(w) in serie di Mac-Laurin per avere:

$$z = \frac{1}{w}\left(1 - \sqrt{w^2 - 2xw + 1}\,\right) = z(0) + z'(0)w + ... = x + \frac{x^2-1}{2}\,w + ...$$

Alla curva chiusa γ intorno all'origine del piano w $\quad w = \varepsilon e^{i\theta}$

corrisponde sul piano z la curva $z = x + \frac{x^2-1}{2}\,\varepsilon\, e^{i\theta} + ...$; con $\frac{x^2-1}{2}\,\varepsilon = r$

Per scrivere la 1) in termini di w bisogna procurarsi l'espressione di $\frac{dz}{z-x}$ e ciò si ottiene da $\frac{dz}{dw}$ con i seguenti passaggi:

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{w}z - \frac{1}{w}\cdot\frac{w-x}{1-zw} = -\frac{1}{w}\cdot\left(\frac{w-x}{1-zw} + z\right) = -\frac{1}{w}\cdot\frac{w-x+z-wz^2}{1-zw} = -\frac{1}{w}\cdot\left[\frac{w(1-z^2)}{1-zw} + \frac{z-x}{1-zw}\right]$$

$$\frac{dz}{z-x} = -\frac{1}{w}\cdot\left(\frac{w\dfrac{1-z^2}{z-x}}{1-zw} + \frac{1}{1-zw}\right)dw \;;\quad \frac{dz}{z-x} = -\frac{1}{w}\cdot\left(\frac{-2}{1-zw} + \frac{1}{1-zw}\right)dw \;;\quad \frac{dz}{z-x} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-zw}\,dw$$

$$\frac{dz}{z-x} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}}\, dw$$

Tenuto conto che: $\left[\dfrac{z^2 - 1}{2(z-x)}\right]^h = \dfrac{1}{w^h}$ si ottiene il risultato:

$$P_h(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \left[\frac{z^2 - 1}{2(z-x)}\right]^h \frac{dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{w^h} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}}\, dw$$

$$P_h(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{w^{h+1}} \cdot (w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-1}{2}}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{G(x,w)}{w^{h+1}}\, dw \qquad 2)$$

avendo posto $G(x,w) = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}}$

La relazione 2) può essere interpretata come formula di Cauchy per le derivate di funzione analitica sul piano w scrivendola come segue:

$$P_h(x) = \frac{h!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\frac{G(x,w)}{h!}}{(w-0)^{h+1}}\, dw$$ e paragonandola con la:

$$f^{(h)}(x) = \frac{h!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-x)^{h+1}}\, dz$$ si può verificare che: $P_h(x) = \dfrac{1}{h!} \dfrac{d^h}{dw^h}[G(x,w)]\Big|_{w=0}$

e in particolare che:

$$h=0 \quad P_0(x) = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dw^0}[G(x,w)]\Big|_{w=0} = (w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-1}{2}} = 1$$

$$h=1 \quad P_1(x) = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{dw^1}[G(x,w)]\Big|_{w=0} = (x-w)(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-3}{2}} = x$$

$$h=2 \quad P_2(x) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dw^2}[G(x,w)]\Big|_{w=0} = \frac{1}{2} \cdot [-(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-3}{2}} + 3(x-w)^2(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-5}{2}}] = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$h=3 \quad P_3(x) = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dw^3}[G(x,w)]\Big|_{w=0} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot[-3(x-w)(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-5}{2}} -6(x-w)(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-5}{2}} +15(x-w)^3(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-7}{2}}]$$

$$= \frac{1}{6}\cdot[-9(x-w)(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-5}{2}} +15(x-w)^3(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{-7}{2}}] = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

Siccome si verifica che i polinomi in x così calcolati coincidono con quelli provenienti dalla definizione mediante la formula di Rodriguez, la funzione

$$G(x,w) = \frac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} = \sum_{h\,0}^{\infty} P_h(x)\cdot w^h$$

con $\quad P_h(x) = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dw^h}[G(x,w)]\Big|_{w=0}$

è la funzione generatrice dei polinimi $P_h(x)$.

Equazione differenziale per $P_h(x)$

Si considera ancora il cerchio $\quad z = x + r\,e^{i\phi}$; $\quad r<|x\pm1|$

e la formula di Cauchy per $P_h(x)$

$$P_h(x) = \frac{1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(z^2 - 1)^h}{(z- x)^{h+1}}dz \quad \text{da cui} \quad (1-x^2)\frac{d}{dx}P_h(x) = \frac{h+1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(1-x^2)(z^2 - 1)^h}{(z- x)^{h+2}}dz$$

Un'ulteriore derivazione sotto il segno di integrale fa scrivere:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_h(x)] = \frac{h+1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c (z^2 - 1)^h\frac{d}{dx}[\frac{1-x^2}{(z- x)^{h+2}}]dz$$

Calcolando a parte $\frac{d}{dx}[\frac{1-x^2}{(z- x)^{h+2}}] = [\frac{-2x}{(z- x)^{h+2}} + (h+2)\frac{1-x^2}{(z- x)^{h+3}}] =$

$$= \frac{h(1-x^2)+2-2x^2-2x(z-x)}{(z- x)^{h+3}} = \frac{h(1-x^2)+2-2xz}{(z- x)^{h+3}}$$

$$= \frac{h+h(-z^2+2zx-x^2)+2-2xz+hz^2-2hzx}{(z- x)^{h+3}} = \frac{-h(z-x)^2}{(z- x)^{h+3}} + \frac{hz^2-2(h+1)zx+h+2}{(z- x)^{h+3}} =$$

$$= \frac{-h(z-x)^2}{(z- x)^{h+3}} + \frac{2(h+1)z^2-2(h+1)zx+h+2-hz^2-2z^2}{(z- x)^{h+3}}$$

$$= -h\frac{1}{(z- x)^{h+1}} + 2(h+1)\frac{z}{(z- x)^{h+2}} - (h+2)\frac{z^2-1}{(z- x)^{h+3}}$$

si ottiene:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_h(x)\right] =$$

$$= -\frac{h(h+1)}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+1}}\,dz + \frac{2(h+1)^2}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+2}}\,dz - \frac{(h+1)(h+2)}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+3}}\,dz$$

Riconosciuto nel primo addendo del secondo membro $h(h+1)P_h(x)$, si porta al primo, e, chiamando $S(x)$ la parte restante del secondo, la precedente equazione si scrive:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_h(x)\right]+h(h+1)P_h(x) = S(x)$$

$$S(x) = \frac{h+1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\left[2(h+1)\oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+2}}\,dz - (h+2)\oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+3}}\,dz\right]=$$

$$=\frac{2(h+1)}{2^h\cdot h!}\left[\frac{(h+1)!}{2\pi i}\oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+2}}\,dz\right] - \frac{1}{2^h\cdot h!}\left[\frac{(h+2)!}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+3}}\,dz\right]=$$

$$=\frac{2(h+1)}{2^h\cdot h!}\,\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}}[x(x^2-1)^h] - \frac{1}{2^h\cdot h!}\,\frac{d^{h+2}}{dx^{h+2}}[(x^2-1)^{h+1}] =$$

$$=\frac{2(h+1)}{2^h\cdot h!}\,\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}}[x(x^2-1)^h] - \frac{1}{2^h\cdot h!}\,\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}}[2(h+1)x(x^2-1)^h] = 0$$

Vale allora l'equazione: $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_h(x)\right]+h(h+1)P_h(x) = 0$

che si può anche scrivere nella forma:

$$(1-x^2)\cdot\frac{d^2}{dx^2}[P_h(x)] - 2x\cdot\frac{d}{dx}[P_h(x)] + h(h+1)P_h(x) = 0$$

Ortogonalità con peso unitario di $P_h(x)$

$$\int_{-1}^{1} P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx = 0 \qquad \text{per } k\neq h \qquad P_h(x) = \frac{1}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h]$$

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1} P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h]\cdot\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]\,dx =$$

$$\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h]\cdot\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[(x^2-1)^k]\Bigg|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}}[(x^2-1)^h]\cdot\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[(x^2-1)^k]\,dx =$$

$$\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h]\cdot\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}[(x^2-1)^k]\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = 0 \qquad \text{perché dotate di fattore } x^2-1$$

Dopo j integrazioni per parti

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx = (-1)^j\int_{-1}^{1}\frac{d^{h+j}}{dx^{h+j}}[(x^2-1)^h]\cdot\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}[(x^2-1)^k]\,dx$$

per j=k

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx = (-1)^k\int_{-1}^{1}\frac{d^{h+k}}{dx^{h+k}}[(x^2-1)^h]\cdot(x^2-1)^k\,dx$$

$$\frac{d^{h+k}}{dx^{h+k}}[(x^2-1)^h] = \frac{d^{h+k}}{dx^{h+k}}[x^{2h} - hx^{2h-1}+\cdots\cdots] \equiv 0 \qquad \text{per } k>h$$

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx \equiv 0 \qquad \text{per } k>h$$

Per la simmetria tra h e k

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx \equiv 0 \qquad \text{per } h>k$$

Allora solo per h=k

$$(2^h h!)^2\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_h(x)\,dx \neq 0$$

Calcolo di $\int_{-1}^{1}[P_h(x)]^2\,dx$; nella precedente dimostrazione di ortogonalità si è potuto scrivere:

$$2^h h!\cdot 2^k k!\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_k(x)\,dx = (-1)^k\int_{-1}^{1}\frac{d^{h+k}}{dx^{h+k}}[(x^2-1)^h]\cdot(x^2-1)^k\,dx$$

da cui per k = h

$$(2^h h!)^2\cdot\int_{-1}^{1}P_h(x)\cdot P_h(x)\,dx = (-1)^h\int_{-1}^{1}\frac{d^{2h}}{dx^{2h}}[(x^2-1)^h]\cdot(x^2-1)^h\,dx =$$

$$= (-1)^h \int_{-1}^{1} \frac{d^{2h}}{dx^{2h}} [x^{2h} - hx^{2h-1} + \cdots\cdots] \cdot (x^2-1)^h \, dx = (-1)^h \cdot (2h)! \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^h \, dx = (2h)! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^h \, dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_h(x) \cdot P_h(x)\, dx = \frac{(2h)!}{(2^h h!)^2} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^h \, dx = \frac{(2h)!}{(2^h h!)^2} \cdot 2 \int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx$$

calcolo di $\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx$

posto $x = \cos\theta$

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2h+1} \, d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2h} \cdot (-\,\mathrm{sen}\theta)\, d\theta =$$

$$= (\mathrm{sen}\theta)^{2h} \cdot \cos\theta \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2h\cos\theta (\mathrm{sen}\theta)^{2h-1} \cdot \cos\theta \, d\theta = -2h \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2h-1} \cdot [1 - (\mathrm{sen}\theta)^2] \, d\theta =$$

$$= -2h \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2h-1} \, d\theta + 2h \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\theta)^{2h+1} \, d\theta = 2h \int_{0}^{1} (1-x^2)^{h-1} \, dx - 2h \int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx$$

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx = \frac{2h}{2h+1} \int_{0}^{1} (1-x^2)^{h-1} \, dx \, ;$$

ripetendo j volte il calcolo che fa passare dall'esponente h ad h-1 si ottiene:

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx = \frac{2h}{2h+1} \cdot \frac{2(h-1)}{2(h-1)+1} \cdots\cdots \frac{2(h-j)}{2(h-j)+1} \int_{0}^{1} (1-x^2)^{h-j-1} \, dx$$

per $h-j=1$ $\quad \int_{0}^{1} (1-x^2)^{h-j-1} \, dx = 1$ $\quad$ e quindi:

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx = \frac{2h}{2h+1} \cdot \frac{2(h-1)}{2(h-1)+1} \cdots\cdots \frac{2(2)}{2(2)+1} \cdot \frac{2(1)}{2(1)+1} = \frac{2^h h!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2h+1)}$$

$$\int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx = \frac{2^h h! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2h}{(2h+1)!} = \frac{(2^h h!)^2}{(2h+1)!}$$

dal sostituire questo valore dell'integrale nella precedente uguaglianza:

$$\int_{-1}^{1} P_h(x) \cdot P_h(x)\, dx = \frac{(2h)!}{(2^h h!)^2} \cdot 2 \int_{0}^{1} (1-x^2)^h \, dx \qquad \text{si ha:}$$

$$\int_{-1}^{1} P_h(x) \cdot P_h(x)\, dx = \frac{(2h)!}{(2^h h!)^2} \cdot 2 \, \frac{(2^h h!)^2}{(2h+1)!} \qquad \text{e in fine:}$$

$$\int_{-1}^{1}[P_h(x)]^2\,dx = \frac{2}{2h+1}$$

Relazioni ricorsive

$xP_h(x)$ è un polinomio di grado h+1 da svilupparsi in serie di polinomi di Legendre

$$xP_h(x) = \sum_{0}^{h+1}{}_i\, c_{i,h}P_i(x) \quad ; \qquad \int_{-1}^{1}P_i(x)xP_h(x)dx = \sum_{0}^{h+1}{}_i\, c_{i,h}\int_{-1}^{1}[P_i(x)]^2dx$$

$$c_{i,h} = \frac{\int_{-1}^{1}P_i(x)xP_h(x)dx}{\int_{-1}^{1}[P_i(x)]^2dx} \qquad \text{per} \quad i \le h+1$$

e per simmetria

$$c_{h,i} = \frac{\int_{-1}^{1}P_i(x)xP_h(x)dx}{\int_{-1}^{1}[P_h(x)]^2dx} \qquad \text{per} \quad h \le i+1 \ \text{ ovvero per } i \ge h-1$$

esistono allora tre coefficienti $c_{i,h}$ diversi da zero e sono $c_{h+1,h}$, $c_{h,h}$, $c_{h-1,h}$ e da ciò la formula ricorsiva completa si restringe a:

$$xP_h(x) = c_{h+1,h}P_{h+1}(x) + c_{h,h}\, P_h(x) + c_{h-1,h}\, P_{h-1}(x)$$

con $\quad c_{i,h}\cdot\int_{-1}^{1}[P_i(x)]^2dx = c_{h,i}\cdot\int_{-1}^{1}[P_h(x)]^2dx \quad$ ed essendo $\quad \int_{-1}^{1}[P_i(x)]^2dx = \frac{2}{2i+1}\quad$ si ha:

$$\frac{c_{i,h}}{c_{h,i}} = \frac{2i+1}{2h+1} \qquad \text{e} \qquad c_{i,h} = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}P_i(x)xP_h(x)dx$$

$$c_{h+1,h} = \frac{2h+3}{2}\int_{-1}^{1}P_{h+1}(x)xP_h(x)dx\ ; \qquad c_{h,h} = \frac{2h+1}{2}\int_{-1}^{1}P_h(x)xP_h(x)dx\ ;$$

$$c_{h-1,h} = \frac{2h-1}{2}\int_{-1}^{1}P_{h-1}(x)xP_h(x)dx$$

L'integrando dell'espressione di $c_{h,h}$ è una funzione dispari per cui $c_{h,h} = 0$ e la relazione ricorsiva tra polinomi di Legendre si ristringe ulteriormente diventando:

$$xP_h(x) = c_{h+1,h}P_{h+1}(x) + c_{h-1,h}\, P_{h-1}(x)$$

I polinomi di Legendre hanno la parità del loro ordine, quindi hanno uno sviluppo del tipo:

$P_h(x) = a_hx^h + b_hx^{h-2}+\cdots\cdot$

$P_{h+1}(x) = a_{h+1}\, x^{h+1} + b_{h+1} x^{h-1} + \cdots\cdots$

$P_{h-1}(x) = a_{h-1}\, x^{h-1} + b_{h-1} x^{h-3} + \cdots\cdots$

e per sostituzione di questi sviluppi nella precedente relazione, conducono a:

$$x\cdot(a_h x^h + b_h x^{h-2} + \cdots\cdots) = c_{h+1,h}(a_{h+1}\, x^{h+1} + b_{h+1} x^{h-1} + \cdots\cdots) + c_{h-1,h}(a_{h-1}\, x^{h-1} + b_{h-1} x^{h-3} + \cdots\cdots)$$

ed il paragone dei coefficienti delle uguali potenze di x nei due membri conduce a:

$$a_h = c_{h+1,h} \cdot a_{h+1} \quad ; \quad b_h = c_{h+1,h} \cdot b_{h+1} - c_{h-1,h} \cdot a_{h-1} \quad ;$$

E' possibile calcolare i coefficienti $c_{i,k}$ usando solo i coefficienti a_h relativi ai termini di grado più alto dello sviluppo ricordando che: $\dfrac{c_{i,k}}{c_{k,i}} = \dfrac{2i+1}{2k+1}$.

Infatti la relazione tra i coefficienti a , per sostituzione di h con h-1, fornisce la:

$$a_{h-1} = c_{h,h-1} \cdot a_h \quad \text{che si muta in} \quad c_{h-1,h} = \frac{2h-1}{2h+1} \cdot \frac{a_{h-1}}{a_h}$$

Basta estrarre dalla definizione di polinomio di Legendre

$$P_h(x) = \frac{1}{2^h \cdot h!} \cdot \frac{d^h}{dx^h} [(x^2-1)^h]$$

la derivata del termine di grado più alto fornisce $a_h x^h = \dfrac{1}{2^h \cdot h!} \cdot \dfrac{d^h}{dx^h} (x^{2h})$, secondo cui a_h ha la forma:

$$a_h = \frac{1}{2^h \cdot h!} \cdot 2h(2h-1)(2h-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(h+2)(h+1)$$

E poi

$$a_h = \frac{(2h)!}{2^h \cdot (h!)^2} \;;\; a_{h+1} = \frac{(2h+2)!}{2^{h+1} \cdot [(h+1)!]^2} \;;\; a_{h-1} = \frac{(2h-2)!}{2^{h-1} \cdot [(h-1)!]^2}$$

conducono alle espressioni:

$$c_{h+1,h} = \frac{\dfrac{(2h)!}{2^h \cdot (h!)^2}}{\dfrac{(2h+2)!}{2^{h+1} \cdot [(h+1)!]^2}} = \frac{2(h+1)^2}{(2h+2)(2h+1)}$$

$$c_{h+1,h} = \frac{h+1}{2h+1}$$

$$c_{h-1,h} = \frac{2h-1}{2h+1}\,\frac{a_{h-1}}{a_h} = \frac{2h-1}{2h+1}\,\frac{\dfrac{(2h-2)!}{2^{h-1} \cdot [(h-1)!]^2}}{\dfrac{(2h)!}{2^h \cdot (h!)^2}} = \frac{2h-1}{2h+1} \cdot \frac{2(2h-2)! \cdot h^2}{(2h)!} = \frac{2h-1}{2h+1} \cdot \frac{2 \cdot h^2}{2h(2h-1)}$$

$$c_{h-1,h} = \frac{h}{2h+1}$$

La relazione ricorsiva tra i tre polinomi di Legendre consecutivi ha quindi la forma:

$xP_h(x) = \frac{h+1}{2h+1} P_{h+1}(x) + \frac{h}{2h+1} P_{h-1}(x)$ oppure

$(h+1)P_{h+1}(x) - (2h+1)xP_h(x) + h\cdot P_{h-1}(x) = 0$

Funzioni di Legendre associate
definite dalla formula:

$$P_h^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} [P_h(x)] = \frac{(-1)^h(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^h\cdot h!} \cdot \frac{d^{h+m}}{dx^{h+m}} [(1-x^2)^h] = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^h\cdot h!} \cdot \frac{d^{h+m}}{dx^{h+m}} [(x^2-1)^h]$$

$P_h^0(x) = P_h(x)$;

Equazione differenziale per $P_h^m(x)$

La costruzione dell'equazione differenziale per $P_h(x)$ conduce all'annullamento della funzione:

$$S(x) = \frac{h+1}{2^{h+1}\cdot\pi i} \left[2(h+1) \oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+2}} dz - (h+2) \oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+3}} dz \right] = 0 \quad \text{da cui}$$

$$2(h+1) \left[\frac{(h+1)!}{2\pi i} \oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+2}} dz \right] - \left[\frac{(h+2)!}{2\pi i} \oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+3}} dz \right] = 0$$

che corrisponde a:

$$2(h+1) \frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} [x(x^2-1)^h] - \frac{d^{h+2}}{dx^{h+2}} [(x^2-1)^{h+1}] = 0$$

Poiché questa funzione esprime un'identità, anche la derivata di ordine m è nulla

$$2(h+1) \frac{d^{h+m+1}}{dx^{h+m+1}} [x(x^2-1)^h] - \frac{d^{h+m+2}}{dx^{h+m+2}} [(x^2-1)^{h+1}] = 0$$

che può assumere la forma:

$$2(h+1) \left[\frac{(h+m+1)!}{2\pi i} \oint_c \frac{z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+2}} dz \right] - \left[\frac{(h+m+2)!}{2\pi i} \oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+m+3}} dz \right] = 0$$

$$\frac{(h+m+1)!}{2\pi i} \oint_c \frac{2(h+1)(z-x)z(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}} dz - \frac{(h+m+2)!}{2\pi i} \oint_c \frac{(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+m+3}} dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{2(h+1)(z-x)z(z^2-1)^h-(h+m+2)(z^2-1)^{h+1}}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz = 0$$

Riduzione del numeratore diviso per $(z^2 - 1)^h$ a polinomio in (z-x) con coefficienti funzioni della sola x

$$\begin{aligned}
&2(h+1)z(z-x)-(h+m+2)\cdot(z^2-1) = (h-m)z^2-2(h+1)zx+h+m+2 = \\
&= (h-m)(z-x)^2-2(h+1)zx+h+m+2-(h-m)x^2+2(h-m)zx = \\
&= (h-m)(z-x)^2-2x(m+1)z+h+m+2-(h-m)x^2 = \\
&= (h-m)(z-x)^2-2x(m+1)(z-x)+h+m+2-(h-m)x^2-2(m+1)x^2 = \\
&= (h-m)(z-x)^2-2x(m+1)(z-x)+h+m+2-(h+m+2)x^2 = \\
&= (h-m)(z-x)^2-2x(m+1)(z-x)+(h+m+2)(1-x^2)
\end{aligned}$$

Il precedente integrale può essere così riscritto:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{[(h-m)(z-x)^2](z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{[2x(m+1)(z-x)](z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{[(h+m+2)(1-x^2)](z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz = 0$$

e dopo la semplificazione ha la forma:

$$\frac{h-m}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+1}}\,dz - \frac{2x(m+1)}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+2}}\,dz + \frac{(h+m+2)(1-x^2)}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz = 0$$

Moltiplicando i tre addendi per (h+m+1)! ciascuno diventa:

$$\frac{(h+m+2)!(1-x^2)}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+3}}\,dz = (1-x^2)\frac{d^{m+h+2}}{dx^{m+h+2}}[(x^2-1)^h]$$

$$\frac{2x(m+1)(h+m+1)!}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+2}}\,dz = 2x(m+1)\frac{d^{m+h+1}}{dx^{m+h+1}}[(x^2-1)^h]$$

$$(h+m+1)\cdot\frac{(h-m)(h+m)!}{2\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+m+1}}\,dz = (m+h+1)(h-m)\frac{d^{m+h}}{dx^{m+h}}[(x^2-1)^h]$$

e quindi:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+h+2}}{dx^{m+h+2}}[(x^2-1)^h] - 2x(m+1)\frac{d^{m+h+1}}{dx^{m+h+1}}[(x^2-1)^h] +(m+h+1)(h-m)\frac{d^{m+h}}{dx^{m+h}}[(x^2-1)^h] = 0$$

Ricordando ora la definizione: $P_h(x) = \frac{1}{2^h \cdot h!}\cdot\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h]$ si sostituisce nella precedente equazione per avere:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}[P_h(x)] - 2x(m+1)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[P_h(x)] +(m+h+1)(h-m)\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)] = 0 \qquad 2)$$

Dalla definizione di $P_h^m(x)$ deriva l'eguaglianza $\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)] = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)$

che, introdotta nella precedente fornisce la:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)]-2x(m+1)\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)]+(m+h+1)(h-m)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}P_h^m(x) = 0$$

Le derivate prima e seconda di $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)$ sono fatte a parte con i seguenti calcoli:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)] = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot\{\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+ mx(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)\} \quad ;$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)] =(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot\{\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]+mx(1-x^2)^{-1}\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+$$

$$+ m[(1-x^2)^{-1}+2x^2(1-x^2)^{-2}]P_h^m(x)\}+(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot\{\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+ mx(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)\}mx(1-x^2)^{-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)] =(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot\{\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+$$

$$+ m(1-x^2)^{-1}[1+(m+2)(x^2-1)(1-x^2)^{-1}+(m+2)(1-x^2)^{-1}]P_h^m(x)\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)] =(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot\{\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+$$

$$- m(1-x^2)^{-1}[m+1-(m+2)(1-x^2)^{-1}]P_h^m(x)\}$$

La sostituzione nell'equazione della funzione $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot P_h^m(x)$ e delle derivate tutte moltiplicate per $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ conduce all'equazione:

$$(1-x^2)\{\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]+2mx(1-x^2)^{-1}\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]- m(1-x^2)^{-1}[m+1-(m+2)(1-x^2)^{-1}]P_h^m(x)\}$$

$$-2x(m+1)\{\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+ mx(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)\}+(m+h+1)(h-m)P_h^m(x) = 0$$

Le semplificazioni successive:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]-2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]- m[m+1-(m+2)(1-x^2)^{-1}]P_h^m(x)$$

$$-2m(m+1)(x^2-1)(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)+(m+h+1)(h-m)P_h^m(x) -2m(m+1)(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)= 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]-2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]- m(m+1)P_h^m(x)+m(m+2)(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)$$

$$+2m(m+1)P_h^m(x)+(m+h+1)(h-m)P_h^m(x) -2m(m+1)(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)= 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]-2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+$$

$$+[(m+h+1)(h-m)+ m(m+1)]P_h^m(x) -[2m(m+1)-m(m+2)](1-x^2)^{-1}P_h^m(x)= 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)]-2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)]+h(h+1)P_h^m(x) -m^2(1-x^2)^{-1}P_h^m(x)= 0$$

portano a scrivere l'equazione differenziale per $P_h^m(x)$ nella forma:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] - 2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] + [h(h+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]P_h^m(x)= 0$$

Proprietà di ortogonalità per le funzioni $P_h^m(x)$

Scritte le equazioni differenziali per $P_h^m(x)$ e per $P_k^n(x)$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] - 2x\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] + [h(h+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]P_h^m(x)= 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}[P_k^n(x)] - 2x\frac{d}{dx}[P_k^n(x)] + [k(k+1) - \frac{n^2}{1-x^2}]P_k^n(x)= 0$$

si moltiplica ciascuna per l'altra funzione ottenendo:

$$(1-x^2)P_k^n(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] - 2xP_k^n(x)\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] + [h(h+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]P_h^m(x)P_k^n(x)= 0$$

$$(1-x^2)P_h^m(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_k^n(x)] - 2xP_h^m(x)\frac{d}{dx}[P_k^n(x)] + [k(k+1) - \frac{n^2}{1-x^2}]P_h^m(x)P_k^n(x)= 0$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si passa alla nuova:

$$(1-x^2)\{P_k^n(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] -P_h^m(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_k^n(x)]\} - 2x\{P_k^n(x)\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] - P_h^m(x)\frac{d}{dx}[P_k^n(x)]\} =$$

$$= [k(k+1) - \frac{n^2}{1-x^2} -h(h+1) + \frac{m^2}{1-x^2}]P_h^m(x)P_k^n(x) \qquad 3)$$

Posto $D(x) = P_k^n(x)\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] - P_h^m(x)\frac{d}{dx}[P_k^n(x)]$ si calcola la sua derivata:

$$\frac{d}{dx}[D(x)] =$$

$$= \frac{d}{dx}[P_k^n(x)]\cdot\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] + P_k^n(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] - \frac{d}{dx}[P_h^m(x)]\cdot\frac{d}{dx}[P_k^n(x)] - P_h^m(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_k^n(x)]$$

semplificata nella relazione:

$$\frac{d}{dx}[D(x)] = P_k^n(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_h^m(x)] - P_h^m(x)\frac{d^2}{dx^2}[P_k^n(x)]$$

La sostituzione nella 3) di D(x) e di $\frac{d}{dx}[D(x)]$ la fa diventare:

$$(1-x^2)\{\frac{d}{dx}[D(x)]\} - 2x\,D(x) = [k(k+1) - \frac{n^2}{1-x^2} - h(h+1) + \frac{m^2}{1-x^2}]P_h^m(x)P_k^n(x)$$

il cui primo membro si riconosce per $\frac{d}{dx}[(1-x^2)D(x)]$ e fa riscrivere l'equazione nella forma:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\{P_k^n(x)\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] - P_h^m(x)\frac{d}{dx}[P_k^n(x)]\}\right) = [k(k+1) - h(h+1) + \frac{m^2-n^2}{1-x^2}]P_h^m(x)P_k^n(x)$$

l'integrazione tra -1 e 1 di entrambi i membri conduce all'eguaglianza:

$$\left.(1-x^2)\{P_k^n(x)\frac{d}{dx}[P_h^m(x)] - P_h^m(x)\frac{d}{dx}[P_k^n(x)]\}\right|_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1}[k(k+1) - h(h+1) + \frac{m^2-n^2}{1-x^2}]\,P_h^m(x)P_k^n(x)dx$$

Dall'annullarsi del primo membro agli estremi con uno zero almeno di primo ordine segue:

$$\int_{-1}^{1}[k(k+1) - h(h+1) + \frac{m^2-n^2}{1-x^2}]\,P_h^m(x)P_k^n(x)dx = 0$$

per n=m e per h≠k deve essere:

$$[k(k+1) - h(h+1)]\int_{-1}^{1}P_h^m(x)P_k^m(x)dx = 0 \qquad ; \qquad \int_{-1}^{1}P_h^m(x)P_k^m(x)dx = 0$$

per h=k e per m≠ n deve essere:

$$(m^2-n^2)\cdot\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}\cdot P_h^m(x)P_h^n(x)dx = 0 \qquad ; \qquad \int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}\cdot P_h^m(x)P_h^n(x)dx = 0$$

La condizione n=m e k=h non assicura la convergenza a valori finiti di $\int_{-1}^{1}P_h^m(x)P_h^m(x)dx$

e di $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}\cdot P_h^m(x)P_h^m(x)dx$

Calcolo dell'integrale convergente $\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx$

Dalla definizione di polinomio di Legendre associato si ha:

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]dx$$

Una prima integrazione per parti porta a scrivere:

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx =$$

$$= \left.(1-x^2)^m\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^m\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\right)dx$$

che per l'annullarsi di $(1-x^2)^m$ agli estremi si riduce a:

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = -\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^m\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\right)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\left(-2mx(1-x^2)^{m-1}\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]+(1-x^2)^m\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[P_h(x)]\right)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)](1-x^2)^{m-1}\left((1-x^2)\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[P_h(x)]-2mx\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\right)dx$$

L'equazione 2) riscritta sostituendo m-1 ad m ha la forma:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[P_h(x)] - 2mx\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)] +(m+h)(h-m+1)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)] = 0$$

che usata per modificare il precedente integrando, fa sintetizzare i calcoli eseguiti con le equazioni:

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]dx =$$

$$= (m+h)(h-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[P_h(x)]\,dx$$

Poiché il procedimento può essere ricorsivo, dopo un numero j di applicazioni vale la:

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = (h+m)(h+m-1)\cdots(h+m-j+1)\cdot(h-m+1)(h-m+2)\cdots(h-m+j)\cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-j}\,\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}[P_h(x)]\,\frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}[P_h(x)]\,dx = \qquad \text{e per } j=m$$

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = (h+m)(h+m-1)\cdots(h+1)\cdot(h-m+1)(h-m+2)\cdots h\cdot \int_{-1}^{1}[P_h(x)]^2\,dx =$$

$$=(h-m+1)(h-m+2)\cdots h(h+1)\cdots(h+m-1)(h+m)\cdot\frac{2}{2h+1}$$

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = \frac{2}{2h+1}\cdot\frac{(h+m)!}{(h-m)!}$$

Si può ora valutare l'integrale con $m\neq n$:

$$\int_{-1}^{1}P_j^m(x)P_j^n(x)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{m+n}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}[P_j(x)]\cdot\frac{d^n}{dx^n}[P_j(x)]\,dx$$

La formula di Rodriguez $P_j(x) = \frac{1}{2^j\cdot j!}\cdot\frac{d^j}{dx^j}[(x^2-1)^j]$ mostra che la derivazione delle potenze di (x^2-1) fornisce dei polinomi la cui parità è quella dell'indice j, poiché, applicando la formula di Newton all'espressione $(x^2-1)^j$, si ottiene un polinomio sempre pari.
Poiché la parità dell'ultimo integrando è quella della somma o della differenza degli ordini di derivazione che vi compaiono, bisogna concludere che tale integrando è una funzione pari solo quando $m-n = 2q$ numero pari.
Per m- n dispari l'integrazione tra -1 e 1 da risultato nullo.
Per m- n pari l'integrazione tra -1 e 1 è riportata come:

$$\int_{-1}^{1}P_j^{m-q}(x)\cdot P_j^{m+q}(x)dx$$

è sviluppata in (Funzioni biortogonali)

Funzione generatrice per le funzioni di Legendre associate $P_h^m(x)$.

Partendo dalla funzione generatrice dei polinomi di Legendre $P_h(x)$:

$$G(x,w) = \frac{1}{\sqrt{w^2 - 2xw + 1}} = \sum_{h=0}^{\infty} P_h(x)\cdot w^h$$

con i coefficienti dello sviluppo di Taylor $\quad P_h(x) = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dw^h}[G(x,w)]\Big|_{w=0}$

e dalla definizione di polinomio associato:

$$P_h^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]$$

si può derivare $G(w,x) = (w^2 - 2xw + 1)^{-\frac{1}{2}}$ rispetto a x m volte ottenendo successivamente:

$$G'(w,x) = w(w^2 - 2xw + 1)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[P_h(x)]\cdot w^h$$

$$G''(w,x) = 3w^2(w^2 - 2xw + 1)^{-\frac{5}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}[P_h(x)]\cdot w^h$$

$$\frac{d^3}{dx^3}[G(w,x)] = 3\cdot 5\cdot w^3 (w^2 - 2xw + 1)^{-\frac{7}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{d^3}{dx^3}[P_h(x)]\cdot w^h$$

.... = ...

$$\frac{d^m}{dx^m}[G(w,x)] = 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m-1)\cdot w^m (w^2 - 2xw + 1)^{-\frac{2m+1}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\cdot w^h$$

Moltiplicando per $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ i due membri di quest'ultima equazione si ha:

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m-1)\cdot w^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{2m+1}{2}}} = \sum_{h=0}^{\infty} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m}[P_h(x)]\cdot w^h$$

che in fine si può riscrivere nella forma dell'equazione:

$$\frac{(2m)!\cdot w^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!(w^2 - 2xw + 1)^{\frac{2m+1}{2}}} = \sum_{h=0}^{\infty} P_h^m(x)\cdot w^h = G_m(w,x)$$

il cui primo membro esprime la funzione generatrice $G_m(w,x)$ del sistema di funzioni

$$P_h^m(x) = \frac{1}{h!}\frac{d^h}{dw^h}\left[\frac{(2m)!\cdot w^m\ (1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!(w^2-2xw+1)^{\frac{2m+1}{2}}}\right]_{w=0}$$

associate ai polinomi di Legendre.

Espressioni di $P_h(x)$ mediante formula di Cauchy con cammino d'integrazione circolare di centro z = x. Ricordando la formula proveniente dalla definizione di $P_h(x)$:

$$P_h(x) = \frac{1}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{d^h}{dx^h}[(x^2-1)^h] = \frac{1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(z^2-1)^h}{(z-x)^{h+1}}dz$$

si può fissare un cerchio c, che non avvolge i punti (1+i0) e (1-i0) il cui raggio sia:

$r=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x-(-1))^{\frac{1}{2}}$.

Se ψ è l'angolo percorso dal punto z corrente sul cerchio rispetto alla direzione positiva dell'asse reale si può scrivere:

$$z = x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}$$

e l'espressione di $P_h(x)$ assume la forma:

$$P_h(x) = \frac{1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_c \frac{(z-1)^h(z+1)^h}{(z-x)^{h+1}}dz =$$

$$= \frac{1}{2^{h+1}\cdot\pi i}\oint_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}-1)^h(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}+1)^h}{[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]^{h+1}}\cdot i(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}d\psi =$$

$$= \frac{1}{2^{h+1}\cdot\pi}\oint_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}-1)^h(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}+1)^h}{[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]^{h}}d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}-1)(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}+1)}{2[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]}\right)^h d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]^2-1}{2[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]}\right)^h d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^2+2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}+(x^2-1)e^{2i\psi}-1}{2[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}]}\right)^h d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-i\psi}+2x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\psi}}{2}\right)^h d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^{i\psi}+e^{-i\psi}}{2}\right)^h d\psi$$

$$P_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\psi]^h\, d\psi$$

Espressioni di $P_h^m(x)$ mediante formula di Cauchy con cammino d'integrazione circolare.

Si parte dalle espressioni secondo Cauchy di $(1-x^2)^h$ e della sua derivata di ordine h+m:

$$(1-x^2)^h = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{(1-z^2)^h}{z-x}\,dz \ ; \qquad \frac{d^{h+m}}{dx^{h+m}}[(1-x^2)^h] = \frac{(h+m)!}{2\pi i}\oint_c \frac{(1-z^2)^h}{(z-x)^{h+m+1}}\,dz$$

dove c è il cerchio di centro z = x e raggio $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Allora la z corrente sul cerchio è definita da: $z = x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}$ e valgono le formule:

$$1-z^2 = [\,1-x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}][\,1+x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}] = (1-x^2)(1+e^{2i\psi})+2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi};$$

$$(z-x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi} \quad ; \quad (z-x)^{m+1} = (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\cdot e^{i\psi(m+1)} \quad ; \quad dz = i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}d\psi$$

Sostituendo nel precedente integrando, questo diventa:

$$\frac{(1-z^2)^h}{(z-x)^{h+m+1}} = \left(\frac{(1-x^2)(1+e^{2i\psi})+2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}\right)^h\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\cdot e^{i\psi(m+1)}}$$

da cui:

$$\frac{d^{h+m}}{dx^{h+m}}[(1-x^2)^h] = \frac{(h+m)!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{(1-x^2)(1+e^{2i\psi})+2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}\right)^h\cdot\frac{i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}d\psi}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\cdot e^{i\psi(m+1)}}$$

$$P_h^m(x) = \frac{(-1)^h(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{d^{h+m}}{dx^{h+m}}[(1-x^2)^h] =$$

$$= \frac{(-1)^h(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{(h+m)!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{(1-x^2)(1+e^{2i\psi})+2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}\right)^h\cdot\frac{i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}d\psi}{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\cdot e^{i\psi(m+1)}}$$

$$P_h^m(x) = \frac{(-1)^h}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{(h+m)!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{(1-x^2)(1+e^{2i\psi})+2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\psi}}\right)^h\cdot\frac{i\,d\psi}{e^{im\psi}}$$

$$P_h^m(x) = \frac{(-1)^h}{2^h\cdot h!}\cdot\frac{(h+m)!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})+2x\right)^h\cdot(\cos m\psi - i\,\mathrm{sen}\, m\psi)d\psi$$

$$P_h^m(x) = \frac{(-1)^h}{h!}\cdot\frac{(h+m)!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cos\psi + x\right)^h\cdot(\cos m\psi - i\,\mathrm{sen}\, m\psi)d\psi$$

posto $x = \cos\theta$

$$P_h^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^h}{h!}\cdot\frac{(h+m)!}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta + \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\psi]^h\cdot\cos m\psi d\psi$$

poiché solo $[\cos\theta + \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\psi]^h$ e $\cos m\psi$ sono funzione pari di ψ

Integrazione sulla sfera unitaria delle funzioni di Legendre associate.

$$\int_{-1}^{1}[P_h^m(x)]^2\,dx = \frac{2}{2h+1}\cdot\frac{(h+m)!}{(h-m)!}$$

Posto $x = \cos\theta$ $dx = -\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta$ si ottiene:

$$-\int_{-\pi}^{0}[P_h^m(\cos\theta)]^2\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta = \int_{0}^{-\pi}[P_h^m(\cos\theta)]^2\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta = \int_{0}^{\pi}[P_h^m(\cos\theta)]^2\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta = \frac{2}{2h+1}\cdot\frac{(h+m)!}{(h-m)!}$$

L'integrazione di questa costante sull'intervallo $(-\pi,\pi)$ porta a quella sulla sfera unitaria fornita dall'espressione:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} [P_h^m(\cos\theta)]^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} [P_h^m(x)]^2 \, dx = \frac{4\pi}{2h+1} \cdot \frac{(h+m)!}{(h-m)!}$$

Ad ogni funzione $f(\phi)$ integrabile sull'intervallo $(-\pi,\pi)$ corrisponde una funzione integrabile sulla sfera unitaria $[P_h^m(\cos\theta)]^2 \cdot f(\phi) \cdot \operatorname{sen}\theta$.