APPENDICE 5

Calcolo dell'integrale definito: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^{\,2}(x)\,dx$

Si parte dalla definizione di polinomio di Hermite $H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \cdot \dfrac{d^r}{dx^r}(e^{-x^2})$ per sostituirla parzialmente nell'integrale indefinito

$$\int e^{-x^2} x^2 H_r^{\,2}(x)\,dx = (-1)^r \int x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r}(e^{-x^2})\,dx =$$

che con una integrazione per parti ed esplicitazione della derivata sotto il segno di integrale diventa:

$$\int e^{-x^2} x^2 H_r^{\,2}(x)\,dx = (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + (-1)^{r-1} \int \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) \cdot [x^2 H_r(x)]'\,dx =$$

$$= (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + (-1)^{r-1} \int \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) \cdot [x^2 H'_r(x) + 2x H_r(x)]\,dx =$$

$$= (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + (-1)^{r-1} \int \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) \cdot [x^2 H'_r(x)]\,dx +$$

$$+ 2(-1)^{r-1} \int x H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2})\,dx$$

Dalla relazione tra un polinomio di Hermite e la sua derivata $H'_r(x) = 2rH_{r-1}(x)$ si trae

$$\int e^{-x^2} x^2 H_r^{\,2}(x)\,dx =$$

$$= (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + 2r(-1)^{r-1} \int e^{-x^2} x^2 H_{r-1}(x) \cdot e^{x^2} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2})\,dx +$$

$$+ 2(-1)^{r-1} \int e^{-x^2} x H_r(x) \cdot e^{x^2} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2})\,dx =$$

$$= (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + 2r \int e^{-x^2} x^2 H^2_{r-1}(x) \cdot dx + 2 \int e^{-x^2} x H_r(x) \cdot H_{r-1}(x)\,dx$$

In base alla relazione $xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2} H_{n+1}(x)$ tra tre successivi ordini di polinomii di Hermite l'ultimo integrale si trasforma fornendo l'equazione:

$$\int e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\, dx = (-1)^r x^2 H_r(x) \cdot \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}(e^{-x^2}) + 2r \int e^{-x^2} x^2 H^2_{r-1}(x) \cdot dx +$$

$$+ \int e^{-x^2} H^2_r(x) dx + 2(r-1) \int e^{-x^2} H_r(x) \cdot H_{r-2}(x)\, dx$$

$(-1)^r H_r(x)$ è una funzione pari di x e i polinomii di ordini diversi sono ortogonali sull'intervallo $(-\infty , \infty)$, perciò, passando al calcolo del secondo membro della precedente equazione su tale intervallo, restano i termini:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_r(x) dx + 2r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-1}(x)\, dx$$

L'ultimo integrale differisce dal primo per la riduzione di un'unità dell'ordine del polinomio, e quindi consente un calcolo ricorsivo di cui sono elencati alcuni passi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-1}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_{r-1}(x) dx + 2(r-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-2}(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-2}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_{r-2}(x) dx + 2(r-2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-3}(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_r(x) dx + 2r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_{r-1}(x) dx + 2^2 r(r-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-2}(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_r(x) dx + 2r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_{r-1}(x) dx +$$

$$+ 2^2 r(r-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_{r-2}(x)\, dx + 2^3 r(r-1)(r-2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-3}(x)\, dx$$

Poiché la normalizzazione dei polinomii di Hermite discende dall'eguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H^2_r(x) dx = 2^r r! \sqrt{\pi}$$ si avrà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = 2^r r!\sqrt{\pi} + 2r\cdot 2^{r-1}(r-1)!\sqrt{\pi} +$$

$$+2^2 r(r-1)\cdot 2^{r-2}(r-2)!\sqrt{\pi} + 2^3 r(r-1)(r-2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-3}(x)\,dx$$

e raggruppando i termini uguali, si può scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = 3(2^r r!) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^3 r(r-1)(r-2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H^2_{r-3}(x)\,dx$$

Se invece di tre si compiono r iterazioni la forma diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = r(2^r r!) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^r r!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2\,dx$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente e risulta

$$\int e^{-x^2} x^2\,dx = x\int e^{-x^2} x\,dx - \int dx\int e^{-x^2} x\,dx = -\frac{1}{2} xe^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

da cui è agevole scrivere il risultato

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = r(2^r r!) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^r r!\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = r(2^r r!) + 2^r r!\,\frac{1}{2} = r!(2r+1)2^{r-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_r^2(x)\,dx = r!(2r+1)2^{r-1}\sqrt{\pi}$$