APPENDICE 3

Consideriamo la relazione 50) dell'appendice 2

$$R_{,\tau}\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = \oint_{\sigma} R\left(\frac{Q}{P}\,\middle|\,\tau\right) R\left(\frac{P}{R}\,\middle|\,\tau\right) d\sigma_P \qquad 1)$$

La serie di potenze $R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = N\left(\frac{Q}{R}\right) + \tau\cdot N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \tau^2\cdot N^{(3)}\left(\frac{Q}{R}\right) + ..$ 2)

è l'elemento della funzione analitica $R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$ sviluppato rispetto all'origine, punto in cui la funzione è olomorfa.

Questa funzione è prolungabile a tutto il piano complesso privato degli interi positivi in cui $R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$ ha dei poli semplici.

Per la relazione 48) dell'appendice 2 il residuo del generico polo $\tau = k$ di $R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$ ha la forma :

$$r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = \lim_{\tau\to k}(\tau-k)\cdot D\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)\frac{\pi z^{\tau}}{\Gamma(\tau)\,\mathrm{sen}\,\pi\tau}$$

Poiché $D\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$ è una funzione intera può essere estratta dal segno di limite e l'equazione diventa:

$$r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = D\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,k\right)\cdot\lim_{\tau\to k}\left[\frac{z^{\tau}}{\Gamma(\tau)}\cdot(-1)^k\frac{\pi(\tau-k)}{\mathrm{sen}\,\pi(\tau-k)}\right]$$

ed infine

$$r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = \frac{(-1)^k\cdot z^k}{(k-1)!}\cdot D\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,k\right) \qquad 3)$$

Usando il teorema di Mittag-Leffler, è ora possibile esprimere la funzione $R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right)$ per mezzo dei residui $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$ nei suoi infiniti poli e del valore della funzione nell'origine, che è dato da $N\left(\frac{Q}{R}\right)$.

Allora si può scrivere :

$$R\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = N\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k\left(\frac{Q}{R}\right)\cdot\left(\frac{1}{\tau-k}+\frac{1}{k}\right) \qquad 4)$$

e , per semplicità, l'addendo indipendente da τ può essere chiamato:

$$F\binom{Q}{R} = N\binom{Q}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k\binom{Q}{R}}{k} \qquad 5)$$

Allora la 4) diventa:

$$R\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = F\binom{Q}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k\binom{Q}{R}}{\tau-k} \qquad 6)$$

e la sua derivata in rapporto a τ è data da :

$$R_{,\tau}\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k\binom{Q}{R}}{(\tau-k)^2} \qquad 7)$$

Con queste espressioni di $R\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right)$ e $R_{,\tau}\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right)$ la relazione 1) può essere trasformata nella seguente :

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k\binom{Q}{R}}{(\tau-k)^2} = \int_{\sigma} \left[F\binom{Q}{P} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i\binom{Q}{P}}{\tau-i}\right]\left[F\binom{P}{R} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{r_h\binom{P}{R}}{\tau-h}\right] d\sigma_P$$

Eguagliando i coefficienti di $(\tau-k)^{\alpha}$ nei due membri ed osservando che il primo, solo per $i = h = k$, trova il suo omologo nel prodotto dei termini contenuti nelle sommatorie del secondo, si trova per $\alpha = 2$ che :

$$-r_k\binom{Q}{R} = \int_{\sigma} r_k\binom{Q}{P}\, r_k\binom{P}{R}\, d\sigma_P \qquad 8)$$

$$\int_{\sigma} r_i\binom{Q}{P}\, r_h\binom{P}{R}\, d\sigma_P = 0 \qquad \text{per } i \neq h \qquad 9)$$

I restanti coefficienti per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ estratti dal secondo membro sono nulli, ovvero:

$$\int_{\sigma} F\binom{Q}{P}\, F\binom{P}{R}\, d\sigma_P = 0 \qquad 10)$$

$$\int_{\sigma} \left[F\binom{Q}{P}\, r_k\binom{P}{R} + r_k\binom{Q}{P}\, F\binom{P}{R}\right] d\sigma_P = 0 \qquad 11)$$

Introducendo in quest'ultima il secondo membro della 5) e tenendo conto della 8) si ottiene :

$$\int_\sigma \left[N\left(\frac{Q}{P}\right) r_k\left(\frac{P}{R}\right) + r_k\left(\frac{Q}{P}\right) N\left(\frac{P}{R}\right) \right] d\sigma_P = \frac{2}{k}\, r_k\left(\frac{Q}{R}\right) \qquad 12)$$

che equivale a:

$$r_k\left(\frac{Q}{R}\right) = k \int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) r_k\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P = k \int_\sigma N\left(\frac{P}{R}\right) r_k\left(\frac{Q}{P}\right) d\sigma_P \qquad 13)$$

e dimostra che $r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$ è un'informazione.

La 10) non dipende da τ e l'uso della 5) la trasforma in:

$$\int_\sigma \left[N\left(\frac{Q}{P}\right) + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{r_k\left(\frac{Q}{P}\right)}{k} \right] \cdot \left[N\left(\frac{P}{R}\right) + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{r_k\left(\frac{P}{R}\right)}{k} \right] d\sigma_P = 0$$

successivamente facendo uso della 8)

$$N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \int_\sigma \sum_{1}^{\infty}{}_k N\left(\frac{P}{R}\right) \cdot \frac{r_k\left(\frac{Q}{P}\right)}{k} d\sigma_P +$$

$$+ \int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{r_k\left(\frac{P}{R}\right)}{k} d\sigma_P = \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}\, r_k\left(\frac{Q}{R}\right);$$

$$N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2} \left[k \int_\sigma N\left(\frac{P}{R}\right) \cdot r_k\left(\frac{Q}{P}\right) d\sigma_P + k \int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot r_k\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P \right] =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}\, r_k\left(\frac{Q}{R}\right)$$

che per la 12) fa pervenire alla :

$$N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, r_k \left(\frac{Q}{R}\right) \qquad 13)$$

Usando la 3), quest'espressione del coefficiente di influenza due volte iterato fornisce quella in funzione dell'informazione locale. Tale espressione è data da:

$$N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, z^k}{k \cdot k!}\, D\left(\frac{Q}{R}\bigg|\, k\right) \qquad 14)$$