APPENDICE 2

Risoluzione dell'equazione integrale a dominio fisso:

$$I(Q) = \tau \int_{\sigma} N(Q,P)\cdot I(P)\, d\sigma_P \qquad 1)$$

dove l'elemento infinitesimo $d\sigma_P$ porta l'indice P per evidenziare la variabile di integrazione dell'integrale multiplo eseguito sull'intero spazio σ dotato di un numero imprecisato di dimensioni.

Esistono varie forme equivalenti del legame espresso dalla 1).

Infatti se un certo valore di τ consente la sua soluzione si potrà scrivere:

$$I(Q) = \tau \int_{\sigma} N(Q\,,R)\, I(R)\, d\sigma_R = \tau^2 \int_{\sigma} N(Q,R) \int_{\sigma} N(R,P)\, I(P)\, d\sigma_P\, d\sigma_R =$$

$$= \tau^2 \int_{\sigma} \left[\int_{\sigma} N(Q,R)\, N(R,P)\, d\sigma_R \right] I(P)\, d\sigma_P \qquad 2)$$

Chiamando nucleo due volte iterato ed indicando con $N^{(2)}(Q,P)$ l'integrale :

$$N^{(2)}(Q,P) = \int_{\sigma} N(Q,R)\, N(R,P)\, d\sigma_R \qquad 3)$$

la 2) assume la forma:

$$I(Q) = \tau^2 \int_{\sigma} N^{(2)}(Q\,,P)\, I(P)\, d\sigma \qquad 4)$$

In generale , se per un dato nucleo $N(Q\,,P)$ esiste qualche valore di τ per cui una funzione del punto P non identicamente nulla $I(P)$ verifica la 1) , allora anche il nucleo :

$$N^{(k)}(Q\,,P) = \int_{\sigma} \cdots\cdots \int_{\sigma} N(Q\,,P_1)\cdot N(P_1,P_2) \cdots\cdots N(P_{k-1},P)\, d\sigma_1 \cdots\cdots d\sigma_{k-1} \qquad 5)$$

dove $d\sigma_h$ si riferisce a P_h , verifica l'equazione integrale:

$$I(Q) = \tau^k \int_{\sigma} N^{(k)}(Q\,,P)\, I(P)\, d\sigma_P \qquad 6)$$

Ancora come prima il nucleo $N^{(k)}(Q,P)$ è detto k volte iterato o k ^{ma} iterazione di N(Q,P).

Poiché sia il fattore τ della 1) sia il fattore τ^k della 6) sono ugualmente imprevedibili a partire dall'informazione contenuta negli elementi di σ, non si potrà stabilire se la funzione di Q e P, costituente il nucleo dell'equazione integrale che fornisce I(P), si debba identificare con N(Q,P) o con $N^{(k)}(Q,P)$.

Nell'impossibilità di distinguere non restringiamo il problema, se tentiamo di risolvere solo la 1) .

Dando alla variabile discreta k dell'equazione 6) tutti i valori tra 1 ed un arbitrario n e poi sommando, si calcola n volte I(Q) e la successiva divisione per n porta alla:

$$I(Q) = \int_{\sigma} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tau^k N^{(k)}(Q,P)\; I(P)\, d\sigma_P$$

Per seguire le opere di Fredholm e di Goursat bisogna sostituire integrali multipli su σ agli integrali definiti su un intervallo delle equazioni per cui la teoria è nata.

Se ciò è lecito e lo spazio σ è divisibile in elementi $\Delta\sigma_i$ con $1 \leq i \leq n$, l'equazione 1) può essere trasformata nella :

$$I(Q) = \sum_{i=1}^{n} \tau \int_{\Delta\sigma_i} N(Q,P)\, I(P)\; d\sigma_P \qquad 7)$$

Se P_i è un opportuno punto di media di $\Delta\sigma_i$,per il teorema della media applicato all'integrale dell'equazione 7) , essa si trasforma in:

$$I(Q) = \sum_{i=1}^{n} \tau \cdot N(Q,P_i) \cdot I(P_i)\; \Delta\sigma_i \qquad 8)$$

Se scegliamo il punto Q tra i punti di media e lo indichiamo con P_j e se introduciamo la funzione degli indici δ_j^i definita come al solito dalla :

$$\delta_j^i = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

$$\delta_j^i = 1 \quad \text{per } i = j$$

otteniamo dalla 8) la relazione :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_j^i \, I(P_i) = I(P_j) = \sum_{i=1}^{n} \tau \, N(P_j,P_i) \; I(P_i) \; \Delta\sigma_i$$

oppure

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\delta_j^i - \tau \, N(P_j,P_i) \; \Delta\sigma_i \right] I(P_i) = 0 \qquad 9)$$

Poiché la 9) esprime un sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari, l'annullarsi del determinante dei coefficienti è condizione necessaria e sufficiente per avere soluzioni $I(P_i)$ non identicamente nulle.

Ritenendo quindi fissati i punti di media degli elementi $\Delta\sigma$, tale determinante è una funzione di τ indicabile con $D_n(\tau)$ e data da :

$$D_n(\tau) = \begin{vmatrix} 1-\tau N(P_1,P_1)\,\Delta\sigma_1 & -\tau N(P_1,P_2)\,\Delta\sigma_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -\tau N(P_1,P_n)\,\Delta\sigma_n \\ -\tau N(P_2,P_1)\,\Delta\sigma_1 & 1-\tau N(P_2,P_2)\,\Delta\sigma_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -\tau N(P_2,P_n)\,\Delta\sigma_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\tau N(P_n,P_1)\,\Delta\sigma_1 & -\tau N(P_n,P_1)\,\Delta\sigma_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1-\tau N(P_n,P_n)\,\Delta\sigma_n \end{vmatrix}$$

10)

$D_n(\tau)$ è un polinomio in τ il cui termine noto $c^*_o = 1$ è ottenuto dal prodotto delle unità che sono primi termini delle differenze che costituiscono la diagonale principale della matrice 10) .

Il coefficiente del termine in $-\tau$ si ottiene dal prodotto dell'unità di n-1 elementi della diagonale principale per il fattore $N(P_i\,,P_i)\;\Delta\sigma_i$ preso dall'elemento non considerato prima della stessa diagonale e poi facendo la somma per i che va da 1 a n dei singoli prodotti.

Allora il coefficiente c^*_1 del polinomio in τ ha la forma:

$$c^*_1 = \sum_{i=1}^{n} N(P_i, P_i)\ \Delta\sigma_i$$

I coefficienti c^*_o e c^*_1 sono gli unici due che vengono costruiti mediante elementi della sola diagonale principale.

Escludendo l'unità della diagonale per due elementi si calcola il coefficiente c^*_2 di $(-\tau)^2$.

I prodotti $N(P_i, P_k)\, N(P_k, P_i)\, \Delta\sigma_i\, \Delta\sigma_k$ sono termini della somma che dà c^*_2 .

Poiché facendo variare i e k da 1 a n lo stesso termine si trova due volte, il minore principale della 10) che dà c^*_2 si otterrà dividendo per due la somma di prodotti suddetta.

Nel calcolo di c^*_h ,potendosi permutare, invece di due, h indici, i minori principali di ordine h si calcoleranno dividendo per h! le somme su h indici dei prodotti di h fattori:

$$N(P_{i_1}, P_{i_2})\, N(P_{i_2}, P_{i_3}) \ldots\ldots\, N(P_{i_{h-1}}, P_{i_h})\, \Delta\sigma_{i_1}\, \Delta\sigma_{i_2} \ldots\ldots \Delta\sigma_{i_h}$$

Stabilito ciò, prima di proseguire, conviene introdurre la notazione di Fredholm per matrici i cui elementi sono valori di una sola funzione di due variabili N(Q ,P) identificando i due membri:

$$\begin{vmatrix} N(Q_1,P_1) & N(Q_1,P_2) & \ldots\ldots & N(Q_1,P_n) \\ N(Q_2,P_1) & N(Q_2,P_2) & \ldots\ldots & N(Q_2,P_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ N(Q_n,P_1) & N(Q_n,P_2) & \ldots\ldots & N(Q_n,P_n) \end{vmatrix} = N\begin{pmatrix} Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \\ P_1, P_2, \ldots, P_n \end{pmatrix}$$

Per calcolare $D_n(\tau) = 1 + \sum_{h=1}^{n} c^*_h\, (-\tau)^h$ dobbiamo calcolare i coefficienti c^*_h

come minori principali della matrice:

$$N\begin{pmatrix} P_1, P_2, \dots P_n \\ P_1, P_2, \dots P_n \end{pmatrix} \qquad 11)$$

estratta da $D_n(\tau)$ sopprimendo le unità negli elementi della diagonale principale.

Il determinante della matrice 11) e quelli di tutti i suoi minori principali non cambiano segno per permutazioni di indici, poiché permutando sia le righe sia le colonne in ugual maniera la permutazione complessiva è sempre pari.

Scelte h righe e h colonne della 11) di indici $i_1, i_2, \dots i_h$, il determinante del minore

$$N\begin{pmatrix} P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_h} \\ P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_h} \end{pmatrix}$$

darà uno degli addendi che formano il coefficiente c^*_h di $(-\tau)^h$ attraverso la relazione:

$$c^*_h = \frac{1}{h!} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_h=1}^{n} N\begin{pmatrix} P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_h} \\ P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_h} \end{pmatrix} \Delta\sigma_{i_1} \Delta\sigma_{i_2} \dots\dots \Delta\sigma_{i_h}$$

Per n tendente all'infinito il sistema di equazioni 9) si trasforma nell'equazione integrale 1) mentre i coefficienti c_h del polinomio esprimente $D_n(\tau)$ si trasformano nei coefficienti c_h della serie di potenze

$$D(\tau) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} c_h (-\tau)^h \qquad 12)$$

dove c_h è dato da:

$$c_h = \frac{1}{h!} \int_\sigma \dots\dots \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1, P_2, \dots P_h \\ P_1, P_2, \dots P_h \end{pmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_h \qquad 13)$$

Nella 13) i punti $P_1, P_2, \dots P_h$ non hanno più ragioni per essere punti di media, ma esplorano l'intero spazio σ per ciascuna integrazione.

Anche adesso $c_o = 1$ come prodotto delle infinite unità della diagonale principale della matrice $D(\tau)$ trasformata di $D_n(\tau)$ per $n \to \infty$.

Per uniformità di scrittura l'elemento diagonale $N(P_i ,P_i)$ può essere scritto come matrice ad una riga e ad una colonna $N\begin{pmatrix} P_i \\ P_i \end{pmatrix}$ della notazione di Fredholm.

Allora la serie di potenze che dà $D(\tau)$ avrà l'espressione :

$$D(\tau)= 1+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^h}{h!} \int_\sigma \dots \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1,P_2 \dots P_h \\ P_1,P_2 \dots P_h \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_h \qquad 14)$$

L'equazione 5) definisce il nucleo k volte iterato $N^{(k)}(Q ,P)$ da cui, ponendo $P=Q$ ed integrando su σ, si ottiene una grandezza invariante in σ, poiché non possiede più alcuna caratteristica che permetta di localizzarla in σ quando la variabile Q scompare per integrazione.

In base a ciò si chiama traccia k^{ma} del nucleo $N(Q ,P)$ l'integrale :

$$A_k = \int_\sigma N^{(k)} (Q ,Q)\ d\sigma_Q \qquad 15)$$

Nello sviluppo in serie di $D(\tau)$ il coefficiente c_n di $(-\tau)^n$ proviene dal minore principale integrando della 13)

$$N\begin{pmatrix} P_1, \dots P_n \\ P_1, \dots P_n \end{pmatrix}$$

che si può provare a sviluppare secondo gli elementi della prima riga, tenendo conto dell'invarianza di segno dei minori rispetto alla permutazione degli indici.

Lo sviluppo è il seguente :

$$N\begin{pmatrix} P_1, \dots P_n \\ P_1, \dots P_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_2, \dots P_n \\ P_2, \dots P_n \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1}\, N\begin{pmatrix}P_1\\ P_i\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}P_2,\ldots\ldots\ldots\ldots P_n\\ P_1,\ldots P_{i-1},P_{i+1},\ldots P_n\end{pmatrix} \qquad 16)$$

e spostando al primo posto l'i^{ma} riga di quest'ultima matrice si ha :

$$(-1)^{i+1}\, N\begin{pmatrix}P_2,\ldots\ldots\ldots\ldots P_n\\ P_1,\ldots P_{i-1},P_{i+1},\ldots P_n\end{pmatrix}=$$

$$= -\, N\begin{pmatrix}P_i,P_2,\ldots P_{i-1},P_{i+1},\ldots P_n\\ P_1,P_2,\ldots P_{i-1},P_{i+1},\ldots P_n\end{pmatrix}$$

indicando con Q_h i punti che compaiono con uguali indici di riga e di colonna nell'ultima matrice, la 16) si riscrive come :

$$N\begin{pmatrix}P_1,\ldots\ldots P_n\\ P_1,\ldots\ldots P_n\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}P_1\\ P_1\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}P_2,\ldots\ldots P_n\\ P_2,\ldots\ldots P_n\end{pmatrix} +$$

$$-\sum_{i=2}^{n} N\begin{pmatrix}P_1\\ P_i\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}P_i,Q_3,\ldots\ldots Q_n\\ P_1,Q_3,\ldots\ldots Q_n\end{pmatrix} \qquad 17)$$

L'ultima matrice della 17) può essere sviluppata con la regola data dalla formula stessa :

$$N\begin{pmatrix}P_i,Q_3,\ldots\ldots Q_n\\ P_1,Q_3,\ldots\ldots Q_n\end{pmatrix}= N\begin{pmatrix}P_i\\ P_1\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}Q_3,\ldots\ldots Q_n\\ Q_3,\ldots\ldots Q_n\end{pmatrix}+$$

$$- \sum_{i=2}^{n} N\begin{pmatrix} P_i \\ Q_h \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_h, R_4, \ldots.. R_n \\ P_1, R_4, \ldots.. R_n \end{pmatrix} \qquad 18)$$

avendo come prima cambiato nome in R_h ai punti Q con uguali indici di riga e di colonna.

Introducendo la 18) nella 17) si ottiene lo sviluppo parziale del minore principale:

$$N\begin{pmatrix} P_1, \ldots.. P_n \\ P_1, \ldots.. P_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_2, \ldots.. P_n \\ P_2, \ldots.. P_n \end{pmatrix} +$$

$$- \sum_{i=2}^{n} N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_i \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_i \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_3, \ldots.. Q_n \\ Q_3, \ldots.. Q_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{h=3}^{n} N\begin{pmatrix} P_i \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_i \\ Q_h \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_h, R_4, \ldots.. R_n \\ P_1, R_4, \ldots.. R_n \end{pmatrix} \qquad 19)$$

L'ultima matrice nel secondo membro della 19) è inferiore di un ordine all'ultima del secondo membro della 17), perciò è possibile ridurre a matrici ad una sola riga ed una sola colonna iterando il procedimento di sostituzione di tale matrice con il suo sviluppo parziale 18).

Così facendo si ottiene lo sviluppo completo :

$$N\begin{pmatrix} P_1, \ldots.. P_n \\ P_1, \ldots.. P_n \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_2, \ldots.. P_n \\ P_2, \ldots.. P_n \end{pmatrix} +$$

$$- \sum_{i=2}^{n} N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_i \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_i \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_3, \ldots.. Q_n \\ Q_3, \ldots.. Q_n \end{pmatrix} +$$

$$- \sum_{i=2}^{n} \sum_{h=3}^{n} N\begin{pmatrix} P_i \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_i \\ Q_h \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_h \\ P_1 \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} R_4, \dots R_n \\ R_4, \dots R_n \end{pmatrix} - \dots\dots \qquad 20)$$

Il primo membro della 20) attraverso n integrazioni su σ vale, secondo la 13), $n!\, c_n$ e la stessa relazione 13) si applica alle $n-k$ integrazioni dei minori principali del secondo membro, dai quali si ottiene $(n-k)!\, c_{n-k}$.

Scrivendo l'eguaglianza tra i due membri ottenuti da quelli della 20) con n integrazioni si ha :

$$\int_\sigma \dots \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1, P_2 \dots P_n \\ P_1, P_2 \dots P_n \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_n = n!c_n = (n-1)!c_{n-1} \cdot \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} d\sigma_1 +$$

$$- (n-2).c_{n-2} \cdot \sum_{i=2}^{n} \int_\sigma \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_i \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} P_i \\ P_1 \end{pmatrix} d\sigma_1\, d\sigma_i \; +$$

$$+(n-3).c_{n-3} \cdot \sum_{i=2}^{n} \sum_{h=3}^{n} \int_\sigma \int_\sigma \int_\sigma N\begin{pmatrix} P_1 \\ P_i \end{pmatrix} . N\begin{pmatrix} P_i \\ Q_h \end{pmatrix} . N\begin{pmatrix} Q_h \\ P_1 \end{pmatrix} d\sigma_1\, d\sigma_i\, d\sigma_h + \dots\dots \qquad 21)$$

Gli integrali a secondo membro della 21) contenuti nelle sommatorie multiple non dipendono dal nome dato alle variabili di integrazione e quindi quelli di uguale molteplicità di integrazione k sono tutti uguali tra loro e uguagliano la traccia A_k del nucleo $N(Q,P)$.

Poiché le sommatorie sono formate di addendi uguali, basta moltiplicarne uno per le differenze tra gli estremi delle sommatorie e riscrivere la 21) in funzione delle tracce e dei coefficienti c_{n-k} dello sviluppo di $D(\tau)$ come segue:

$$n!c_n = (n-1)!.c_{n-1}.A_1 - (n-2)!.(n-1).c_{n-2}.A_2 + (n-3)!.(n-1).(n-2).c_{n-3}.A_3 - \dots\dots\dots$$

ed osservando che tutti i fattori dei varii addendi $c_{n-k}\, A_k$ sono uguali ad (n-1)!, si giunge alla relazione:

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \; A_k \, c_{n-k} \qquad 22)$$

Indicando per semplicità di scrittura con B_k l'espressione $(-1)^{k+1} A_k$ si può riscrivere la 14) come segue:

$$D(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\tau)^n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot c_{n-k} \qquad 23)$$

Scriviamo ora un'espressione di $D(\tau)$ evidenziante i coefficienti c_k rendendo esplicita la somma finita della 23)

a partire dal termine con k = n;

$$D(\tau) = 1 + c_o \cdot \left[B_1(-\tau) + B_2 \frac{(-\tau)^2}{2} + \ldots\ldots \right] +$$

$$+ c_1 \cdot \left[B_1 \frac{(-\tau)^2}{2} + B_2 \frac{(-\tau)^3}{3} + \ldots\ldots \right] + c_2 \cdot \left[B_1 \frac{(-\tau)^3}{3} + B_2 \frac{(-\tau)^4}{4} + \ldots\ldots \right] + \ldots\ldots\ldots$$

e derivando in rapporto a $(-\tau)$ questa somma infinita di somme infinite si passa alla:

$$-D'(\tau) = c_o \Big[B_1 + B_2(-\tau) + B_3(-\tau)^2 + \ldots \Big] +$$
$$+ c_1 (-\tau) \Big[B_1 + B_2(-\tau) + B_3(-\tau)^2 + \ldots \Big] +$$
$$+ c_2 (-\tau)^2 \Big[B_1 + B_2(-\tau) + B_3(-\tau)^2 + \ldots \Big]$$

e poi

$$-D'(\tau) = D(\tau) \Big[B_1 + B_2(-\tau) + B_3(-\tau)^2 + \ldots \Big]$$

e ricordando che :

$$B_k = (-1)^{k+1} A_k$$

si conclude il calcolo scrivendo :

$$-D'(\tau) = D(\tau) \cdot \Big[A_1 + A_2 \tau + \ldots\ldots . A_{k+1} \tau^k + \ldots\ldots \Big] \qquad 24)$$

Un altro passo verso la soluzione di Fredholm dell'equazione 1) è lo sviluppo del generico minore della matrice 11).

L'equazione 20) mostra come sia possibile trasformare un minore principale in una combinazione lineare di minori principali di ordine inferiore mediante coefficienti costruiti con il solo nucleo della 1).

La particolarità che si tratti di minori principali viene sfruttata nel passaggio dalla 20) alla 21).

Per usare un procedimento analogo conviene allora mettere in risalto la parte principale del generico minore della 11) e precisamente i primi m indici di riga Q_i e i primi m indici di colonna R_h appartengono ad elementi di matrice variamente disposti rispetto alla diagonale principale, mentre i secondi n elementi ad indici P_k hanno un simmetrico rispetto alla stessa diagonale.

Il generico minore è allora :

$$N\begin{pmatrix} Q_1,...Q_m,P_1,...P_n \\ R_1,...R_m,P_1,...P_n \end{pmatrix}$$

dove il generico P_k può essere spostato al primo posto tra gli indici di riga e di colonna senza cambiamento del segno del minore.

Sviluppandolo secondo la prima riga si ottiene: $N\begin{pmatrix} Q_1,...Q_m,P_1,...P_n \\ R_1,...R_m,P_1,...P_n \end{pmatrix} =$

$$= \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} N\begin{pmatrix} Q_1 \\ R_h \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} Q_2,....................Q_m,P_1,...P_n \\ R_1,...R_{h-1},R_{h+1},...R_m,P_1,...P_n \end{pmatrix} +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} N\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_i \end{pmatrix} \cdot N\begin{pmatrix} P_i,Q_2,....Q_m,S_1,...S_{n-1} \\ R_1,........R_m,S_1,...S_{n-1} \end{pmatrix} \qquad 25)$$

dove la sequenza degli indici $S_1 ....S_{n-1}$ sta ad indicare quella degli $n-1$ indici $P_1, ...P_{i-1}, P_{i+1}, ...P_n$.

Integrando n volte su σ i due membri della 25) e ricordando che l'indice P_i dell'ultima sommatoria, essendo variabile di integrazione e comparendo n volte, fornisce n termini uguali, possiamo scrivere :

$$\int_\sigma ... \int_\sigma N\begin{pmatrix} Q_1,...Q_m,P_1,...P_n \\ R_1,...R_m,P_1,...P_n \end{pmatrix} d\sigma_1....d\sigma_n =$$

$$= \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} N\left(\begin{matrix}Q_1\\ R_h\end{matrix}\right) \cdot \int_\sigma \ldots \int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,Q_m,P_1,\ldots P_n\\ R_1,\ldots R_{h-1},R_{h+1},\ldots R_m,P_1,\ldots P_n\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots\ldots d\sigma_n +$$

$$- n \cdot \int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q_1\\ P\end{matrix}\right) \cdot \left[\int_\sigma \ldots \int_\sigma N\left(\begin{matrix}P,Q_2,\ldots Q_m,S_1,\ldots S_{n-1}\\ R_1,\ldots\ldots R_m,S_1,\ldots S_{n-1}\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots\ldots d\sigma_{n-1}\right] d\sigma_P \qquad 26)$$

Il primo membro della 26) è funzione delle variabili Q ed R che portano i primi m indici.

Il primo termine del secondo membro è una somma rispetto all'indice h dei prodotti degli m elementi della riga Q_1 per i minori complementari.

Nel secondo termine del secondo membro, all'indice h è sostituita la variabile continua P e la somma discreta diventa un'integrazione per ottenere la somma degli infiniti prodotti degli elementi distribuiti in modo continuo sulla prima riga per i loro minori complementari.

In base a ciò Fredholm definisce minore di D(τ) la sommatoria:

$$D\left(\begin{matrix}P,Q_2\ldots Q_m\\ R_1\ldots\ldots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \int_\sigma \ldots \int_\sigma N\left(\begin{matrix}P,Q_2,\ldots Q_m,S_1,\ldots S_{n-1}\\ R_1,\ldots\ldots R_m,S_1,\ldots S_{n-1}\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots\ldots d\sigma_{n-1}$$

ovvero

$$D\left(\begin{matrix}P,Q_2\ldots Q_m\\ R_1\ldots\ldots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^{n}}{n!} \int_\sigma \ldots \int_\sigma N\left(\begin{matrix}P,Q_2,\ldots Q_m,P_1,\ldots P_n\\ R_1,\ldots\ldots R_m,P_1,\ldots P_n\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots\ldots d\sigma_n \qquad 27)$$

dove il termine corrispondente ad n=0 è la parte caratteristica $N\left(\begin{matrix}P,Q_2\ldots Q_m\\ R_1\ldots\ldots R_m\end{matrix}\right)$ non integrata .

I minori si numerano a partire da quelli che provengono dalla matrice per cancellazione di una riga e di una colonna e l'ordine del minore è quello delle linee soppresse e indicate.

Se allora si moltiplicano i due membri della 26) per $\dfrac{(-\tau)^n}{n!}$ e si fa la somma da 1 ad ∞ sull'indice n si ottiene secondo la 27):

$$D\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m\\ R_1,\dots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)-N\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m\\ R_1,\dots R_m\end{matrix}\right)=$$

$$=\sum_{h=1}^{m}(-1)^{h-1}N\left(\begin{matrix}Q_1\\ R_h\end{matrix}\right)\cdot\left[D\left(\begin{matrix}Q_2\dots\dots\dots\dots\dots Q_m\\ R_1,..R_{h-1},R_{h+1},..R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)-N\left(\begin{matrix}Q_2\dots\dots\dots\dots\dots Q_m\\ R_1,..R_{h-1},R_{h+1},..R_m\end{matrix}\right)\right]+$$

$$+\tau\int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q_1\\ P\end{matrix}\right)D\left(\begin{matrix}P,Q_2\dots Q_m\\ R_1\dots\dots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)d\sigma_P \qquad 28)$$

ed infine semplificando la parte caratteristica $N\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m\\ R_1,\dots R_m\end{matrix}\right)$ al primo membro con il suo sviluppo nel secondo si giunge alla :

$$D\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m\\ R_1,\dots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)=\sum_{h=1}^{m}(-1)^{h-1}N\left(\begin{matrix}Q_1\\ R_h\end{matrix}\right)\cdot D\left(\begin{matrix}Q_2\dots\dots\dots\dots\dots Q_m\\ R_1,..R_{h-1},R_{h+1},..R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)+$$

$$+\tau\int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q_1\\ P\end{matrix}\right)D\left(\begin{matrix}P,Q_2\dots Q_m\\ R_1\dots\dots R_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)d\sigma_P \qquad 29)$$

Il minore principale generico di ordine m di $D(\tau)$ si ottiene dalla 27) ed è così espresso:

$$D\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m\\ Q_1,\dots Q_m\end{matrix}\middle|\,\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^n}{n!}\int_\sigma\dots\int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q_1,\dots Q_m,P_1,\dots P_n\\ Q_1,\dots Q_m,P_1,\dots P_n\end{matrix}\right)d\sigma_1\dots d\sigma_n$$

Integrando m volte su σ i due membri tenendo conto dell'inessenzialità del nome delle variabili che esplorano l'intero σ , segue la:

$$\int_\sigma \cdots \int_\sigma D\left(\begin{matrix} Q_1,\ldots Q_m \\ Q_1,\ldots Q_m \end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_1 \ldots d\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \int_\sigma \cdots \int_\sigma N\left(\begin{matrix} P_1,\ldots P_{n+m} \\ P_1,\ldots P_{n+m} \end{matrix}\right) d\sigma_1 \ldots d\sigma_{n+m}$$

Confrontando il secondo membro di quest'ultima equazione con la derivata n^{ma} di $D(\tau)$ espressa dalla 14), si deduce l'eguaglianza:

$$\int_\sigma \cdots \int_\sigma D\left(\begin{matrix} Q_1,\ldots Q_m \\ Q_1,\ldots Q_m \end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_1 \ldots d\sigma_m = (-1)^m \frac{d^m D(\tau)}{d\tau^m} \qquad 30)$$

A questo punto la 24), la 29) e la 30) ci forniscono i mezzi per esprimere la soluzione generale della 1).

Come per aversi soluzioni non nulle del sistema omogeneo 9) deve porsi $D_m(\tau) = 0$ con $D_m(\tau)$ dato dalla 10) , così per $n \to \infty$ il secondo teorema di Fredholm assicura soluzioni non nulle per l'equazione integrale 1) solo per $D(\tau) = 0$.

Se però fosse $D(\tau) = 0$ indenticamente, sarebbero nulle tutte le derivate ed anche tutti i minori principali di $D(\tau)$ secondo la 30).

La conseguente estinzione dei minori 11) darebbe alla 1) soluzione nulla per ogni valore di τ.

Scartati allora i casi estremi in cui valgono identicamente sia $D(\tau)\neq 0$ sia $D(\tau)=0$, chiamiamo valori singolari τ_s i valori di τ per cui sia $D(\tau_s) = 0$.

Se per $\tau=\tau_s$ le derivate di $D(\tau)$ fossero tutte nulle, si ricadrebbe nel caso $D(\tau)=0$ identicamente.

Esisterà allora una derivata di ordine n di $D(\tau)$ non nulla per $\tau=\tau_s$ ed in base alla 30) un minore principale non nullo di ordine n.

Esisteranno allora minori non principali non nulli tra quelli di un ordine $m \leq n$.

Se è m l'ordine dei primi minori non nulli, tutti quelli di ordine $m-1$, $m-2$, ..ecc. fino a $D(\tau)$ stesso sono nulli.

In tal caso restano diversi da zero i minori della 29) fuori dal segno di sommatoria e la 29) stessa si trasforma in :

$$D\left(\begin{matrix} S,Q_2,\dots Q_m \\ R_1,\dots\dots R_m \end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \tau\int_\sigma N\begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix}\cdot D\left(\begin{matrix} P Q_2,\dots Q_m \\ R_1,\dots\dots R_m \end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_P \qquad 31)$$

Così abbiamo ottenuto una soluzione della 1) e, noto il nucleo N(Q,P), il procedimento per costruirla è dato dalla 27).

Tale soluzione non è la più generale; infatti si è partiti dal particolare sviluppo della 25) secondo gli elementi della prima riga.

Possono essere date allora altre m-1 soluzioni linearmente indipendenti in cui i primi indici di riga S e P nelle matrici rispettivamente a primo e secondo membro della 31) vanno a sostituire invece di Q_1 una qualsiasi Q_i con $2 \leq i \leq m$.

Una combinazione lineare con coefficienti arbitrari delle m soluzioni indipendenti costituisce la soluzione generale della 1).

Quando è valida questa soluzione ovvero quando sono nulli tutti i minori di D(τ) di ordine inferiore ad m, m-1 righe e m-1 colonne della matrice che costituisce D(τ) sono combinazioni lineari delle altre.

Cancellate m-2 righe di D(τ), la matrice rettangolare completa ha nulli tutti i minori di ordine massimo, e ciascuno di questi minori ha il ruolo di D(τ) nel risolvere uno degli (m-1)! sistemi equivalenti all'equazione omogenea 1).

Solo il caso m=1 porta ad una soluzione unica dell'equazione 1) della forma:

$$D\left(\begin{matrix} Q \\ R \end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \tau\int_\sigma N(Q,P)\cdot D\left(\begin{matrix} P \\ R \end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_P \qquad 32)$$

Essendo diversi da zero i minori di primo ordine di D(τ), la 30) dà la sua derivata prima non identicamente nulla mediante la relazione:

$$\frac{d\,D(\tau)}{d\tau} = -\int_\sigma D\left(\begin{matrix} Q \\ Q \end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_Q \qquad 33)$$

Ciò che è stato detto per l'equazione omogenea 1) può essere ripetuto per l'equazione omogenea associata che ha soluzione per gli stessi valori singolari τ_s data da :

$$D\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \tau \int_\sigma N(P;R)\cdot D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_P \qquad 34)$$

Come già detto, se $D(\tau)$ è una funzione analitica, non può avere uno spettro continuo di valori singolari, perché, essendo identica alla funzione nulla anche su un intervallo limitato, sarebbe dovunque $D(\tau)=0$.
I valori singolari τ_s debbono allora essere tutti isolati.

Considerando la relazione 24), il fattore tra parentesi quadra al secondo membro deve avere un polo del primo ordine per $\tau = \tau_s$, se resta diversa da zero la derivata $D'(\tau_s)$ per rispettare la 33).
Nelle vicinanze di τ_s la 24) può essere integrata e il risultato vale anche al limite per $\tau \rightarrow \tau_s$, se l'integrale di $\frac{D'(\tau)}{D(\tau)}$ diverge.

Ricordando che $D(0)=1$, si ottiene:

$$D(\tau) = e^{-\left[A_1\tau+\frac{A_2}{2}\tau^2+ \dots + \frac{A_n}{n}\tau^n + \dots\right]} \qquad 35)$$

L'ipotesi $\tau_s = k$ intero positivo (trattata nell'appendice 1)) porta alla forma:

$$D(\tau) = F(\tau,z) = e^{-\left[(c_e + \ln z)\tau + \sum_{2}^{\infty} {}_k \frac{\zeta(n)}{n}\cdot\tau^n\right]} \qquad 36)$$

Le tracce 15) del nucleo della 1) sono tutte limitate e mentre la prima, sebbene non possa annullarsi, dipende dal parametro z, le altre dipendono solo dal loro ordine secondo le relazioni :

$$A_1 = \int_\sigma N(Q,Q)\, d\sigma_Q = c_e + \ln z$$

$$A_2 = \int_\sigma N^{(2)}(Q,Q)\, d\sigma_Q = \zeta(2) \qquad 37)$$

$$A_3=\int_\sigma N^{(3)}(Q,Q)\,d\sigma_Q\;=\zeta(3)$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

$$A_h=\int_\sigma N^{(h)}(Q,Q)\,d\sigma_Q\;=\zeta(h)$$

Sono qui riportate le funzioni ζ(h) per $2\leq h\leq 10$ che,come si vede,convergono ad 1 per $h\rightarrow\infty$;

ζ(2)=1,644934 ; ζ(3)=1,202057 ; ζ(4)=1,082323 ;

ζ(5)=1,036827 ; ζ(6)=1.017343 ; ζ(7)=1,008349 ;

ζ(8)=1,004077 ; ζ(9)=1,002008 ; ζ(10)=1,000994;

Poiché nell'introdurre la 32) è stato posto m=1, conviene scrivere la 27) e le equazioni che conseguono nella forma che acquistano quando la parte caratteristica della matrice

$$N\begin{pmatrix} P,Q_2,\dots\ Q_m P_1,\dots\ P_n \\ R_1,\dots\dots\ R_m P_1,\dots\ P_n \end{pmatrix}$$

è ridotta ad una sola riga ed una sola colonna ottenendo:

$$D\left(\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right)=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{(-\tau)^n}{n!}\int_\sigma\cdots\int_\sigma N\begin{pmatrix}QP_1\dots P_n\\RP_1\dots P_n\end{pmatrix}d\sigma_1\dots d\sigma_n \qquad 38)$$

ed anche la 25) diventa :

$$N\begin{pmatrix}Q,P_1\dots P_n\\P,P_1\dots P_n\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}P_1,\dots\ P_n\\P_1,\dots\ P_n\end{pmatrix}-\sum_{1}^{n}{}_{i}\,N\begin{pmatrix}Q\\R_i\end{pmatrix}\cdot N\begin{pmatrix}R_i,S_1,\dots\ S_{n-1}\\P,\ S_1,\dots\ S_{n-1}\end{pmatrix} \qquad 39)$$

Integrando n volte su σ e ricordando la 13) si ha:

$$\int_\sigma \cdots \int_\sigma N\begin{pmatrix} Q, P_1 \dots P_n \\ P, P_1 \dots P_n \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_n = \tag{40)}$$

$$= n!\, c_n \cdot N\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n} \int_\sigma N\begin{pmatrix} Q \\ R_i \end{pmatrix} \cdot \left[\int_\sigma \cdots \int_\sigma N\begin{pmatrix} R_i, S_1, \dots S_{n-1} \\ P, S_1, \dots S_{n-1} \end{pmatrix} d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1} \right] d\sigma_{R_i}$$

La sommatoria a secondo membro della 40) è costituita di n termini uguali, perché un qualsiasi punto P_k del primo membro può prendere nome R_i e può essere portato al primo posto senza modificare il segno della matrice integranda. Di conseguenza la 40) si trasforma in :

$$\int_\sigma \cdots \int_\sigma N\begin{pmatrix} Q, P_1 \dots P_n \\ P, P_1 \dots P_n \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_n = \tag{41)}$$

$$= n!\, c_n \cdot N\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} - n \int_\sigma N\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \left[\int_\sigma \cdots \int_\sigma N\begin{pmatrix} R, S_1, \dots S_{n-1} \\ P, S_1, \dots S_{n-1} \end{pmatrix} d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1} \right] d\sigma_R$$

Il termine fra parentesi quadra può essere sostituito con l'espressione che la 41) stessa dà del primo membro sostituendo n-1 ad n .

Ciò facendo e ricordando la 3) , si ottiene:

$$\int_\sigma N\begin{pmatrix} Q, P_1 \dots P_n \\ P, P_1 \dots P_n \end{pmatrix} d\sigma_1 \dots d\sigma_n =$$

$$= n!\, c_n \cdot N\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) - n(n-1)!\, N^{(2)}\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) c_{n-1} + \qquad 42)$$

$$+ n\cdot(n-1) \int_\sigma N^{(2)}\left(\begin{matrix}Q\\S\end{matrix}\right) \cdot \left[\int_\sigma \ldots \int_\sigma N\left(\begin{matrix}S,T_1,\ldots\, T_{n-2}\\P,T_1,\ldots\, T_{n-2}\end{matrix}\right) d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-2} \right] d\sigma_S$$

La matrice in parentesi quadra integrando dell'integrale multiplo sia nella 42) sia nella 41) è un termine su cui si può operare ripetutamente fino ad estinguere la parte principale ottenendo l'n+1ma iterazione del nucleo.

Si giunge così all'espressione dell' n^{mo} coefficiente della serie di potenze 38) in funzione dei primi n+1 nuclei iterati :

$$\int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q,P_1\ldots P_n\\P,P_1\ldots P_n\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots d\sigma_n =$$

$$= n!\left[c_n \cdot N\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) + \ldots.(-1)^k\, c_{n-k} N^{(k+1)}\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) + \ldots..(-1)^n\, c_0 N^{(n+1)}\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right)\right]$$

che sinteticamente può scriversi:

$$\frac{1}{n!} \int_\sigma N\left(\begin{matrix}Q,P_1\ldots P_n\\P,P_1\ldots P_n\end{matrix}\right) d\sigma_1\ldots d\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, c_{n-k}\, N^{(k+1)}\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) \qquad 43)$$

Sostituendo ora nella 38) le espressioni dei coefficienti di $(-\tau)^n$ date dalla 43) si ha:

$$D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = N\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\tau)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, c_{n-k}\, N^{(k+1)}\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\right) \qquad 44)$$

Ponendo ora :

$$N\left(\begin{matrix}Q,\\P\end{matrix}\right) = N^{(1)}\left(\begin{matrix}Q,\\P\end{matrix}\right)$$

e ricordando che $c_o = 1$ si passa alla :

$$D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} (-\tau)^n \cdot \sum_{0}^{n}{}_{k} (-1)^k \, c_{n-k} \, N^{(k+1)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} \qquad 45)$$

I termini della serie di potenze 45) possono essere ordinati secondo l'ordine di iterazione del nucleo invece che secondo le potenze di τ scrivendo :

$$D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\left[c_o + c_1(-\tau) + c_2(-\tau)^2 + ..\right] + N^{(2)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\left[-c_o(-\tau) - c_1(-\tau)^2 + ..\right] +$$

$$+ N^{(3)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\left[c_o(-\tau)^2 + c_1(-\tau)^3 + ..\right] + ... \qquad 46)$$

Ricordando ora l'espressione di $D(\tau)$ data dalla 12)

$$D(\tau) = c_o + c_1(-\tau) + c_2(-\tau)^2 + ... \qquad 47)$$

contenuta in tutti i coefficienti dei nuclei iterati dell'espressione 46) di $D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right)$, questa si trasforma in :

$$D\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = D(\tau)\cdot\left[N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau\cdot N^{(2)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau^2\cdot N^{(3)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + ..\right] \qquad 48)$$

La serie di potenze in τ espressa dal contenuto della parentesi quadra della 48) è chiamata risolvente per il nucleo $N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}$ e si indica con:

$$R\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right) = N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau\cdot N^{(2)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau^2\cdot N^{(3)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \cdots \qquad 49)$$

E' importante considerare una proprietà dell'integrale costruito con risolventi:

$$\int_\sigma R\left(\begin{matrix}Q\\P\end{matrix}\middle|\,\tau\right)\cdot R\left(\begin{matrix}P\\R\end{matrix}\middle|\,\tau\right) d\sigma_P =$$

$$= \int_\sigma \left[N\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau\cdot N^{(2)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \tau^2\cdot N^{(3)}\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix} + \cdots\right]\cdot\left[N\begin{pmatrix}P\\R\end{pmatrix} + \tau\cdot N^{(2)}\begin{pmatrix}P\\R\end{pmatrix} + \tau^2\cdot N^{(3)}\begin{pmatrix}P\\R\end{pmatrix} + \cdots\right] d\sigma_P =$$

$$= \int_\sigma N\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N\left(\frac{P}{R}\right) d\sigma_P + \tau \int_\sigma \left[N^{(2)}\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N\left(\frac{P}{R}\right) + N\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N^{(2)}\left(\frac{P}{R}\right) \right] d\sigma_P +$$

$$+ \tau^2 \cdot \int_\sigma \left[N^{(3)}\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N\left(\frac{P}{R}\right) + N^{(2)}\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N^{(2)}\left(\frac{P}{R}\right) + N\left(\frac{Q}{P}\right) \cdot N^{(3)}\left(\frac{P}{R}\right) \right] d\sigma_P + \tau^3 \cdots\cdots =$$

$$= N^{(2)}\left(\frac{Q}{R}\right) + 2\tau \cdot N^{(3)}\left(\frac{Q}{R}\right) + 3\tau^2 \cdot N^{(4)}\left(\frac{Q}{R}\right) + 4\tau^3 \cdot N^{(5)}\left(\frac{Q}{R}\right) + \cdots$$

Quest'ultimo membro eguaglia la derivata di $R\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau\right)$ in rapporto a τ e ciò fa scrivere:

$$R\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau\right)_{,\tau} = \int_\sigma R\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau\right) \cdot R\left(\frac{P}{R}\middle|\tau\right) d\sigma_P \qquad 50)$$

L'equazione 48) è stata introdotta indipendentemente dalla risolubilità delle 32) e 34) e quindi deve valere per ogni valore di τ la sua espressione:

$$D\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau\right) = D(\tau) \cdot R\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau\right) \qquad 51)$$

Per $\tau=k$ intero positivo, valore singolare delle 32) e 34), il primo membro della 51) è soluzione non nulla delle stesse equazioni integrali, funzione analitica di τ, mentre il fattore $D(\tau)$ del secondo membro è nullo per $\tau= k$.

Infatti secondo la 36) è:

$$D(\tau) = \frac{z^{-\tau}}{\Gamma(1-\tau)} = \frac{\Gamma(\tau)}{z^\tau} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\pi\tau}{\pi} \qquad 52)$$

da cui si deduce che gli zeri di $D(\tau)$ sono del primo ordine e perciò secondo la 51) i valori $\tau=k$ sono poli del primo ordine per la risolvente $R\left(\frac{Q}{P}\middle|\tau\right)$.

Tenendo conto del fatto che per $\tau > 0$, $\frac{\Gamma(\tau)}{z^\tau}$ è una funzione analitica e lo è pure $D\left(\frac{Q}{R}\middle|\tau\right)$ espresso dalla 38), la 51), per sostituzione in essa dell'ultimo membro della 52) diventa una relazione tra funzioni analitiche di τ della forma:

$$D\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = \frac{\Gamma(\tau)}{z^{\tau}} \cdot B\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) \tag{53}$$

con

$$B\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = R\left(\frac{Q}{P}\,\middle|\,\tau\right)\frac{\mathrm{sen}\pi\tau}{\pi} \tag{54}$$

Si può osservare che il primo fattore del secondo membro della 53) ha la forma di una trasformata di Laplace rispetto alla variabile z .

La condizione di convergenza Re(z) > 0 dell'integrale di Laplace

$$\int_{o}^{\infty} e^{-zu} \quad u^{\tau-1}du = \frac{\Gamma(\tau)}{z^{\tau}} \tag{55}$$

è verificata, poiché z è reale e $z_{min.} \geq 1$.

Ora si può vedere che, essendo τ parametro vengono associate due variabili: la precedente variabile z ed una nuova variabile u legata alla prima dalla relazione $\pounds\left[1(u)\right] = \frac{1}{z}$ in modo tale che alla funzione $u^{\tau-1}$ corrisponda la sua trasformata $\frac{\Gamma(\tau)}{z^{\tau}}$.

Con zeri negli stessi punti di τ può essere scritta la nuova forma del determinante di Fredholm come:

$$D_u(\tau) = u^{\tau-1} \cdot \frac{\mathrm{sen}\pi\tau}{\pi}$$

e la soluzione della 1) che segue:

$$D_u\left(\frac{Q}{R}\,\middle|\,\tau\right) = u^{\tau-1} \cdot R\left(\frac{Q}{P}\,\middle|\,\tau\right)\frac{\mathrm{sen}\pi\tau}{\pi} \tag{56}$$