APPENDICE 1

Trasformazione reversibile in serie di potenze della funzione:

$$F(\tau,z) = \frac{z^{-\tau}}{\Gamma(1-\tau)} = \frac{\Gamma(\tau)\,\mathrm{sen}(\pi\tau)}{\pi\cdot z^{\tau}} \qquad 1)$$

Ricordando la formula di Euler per la funzione Γ

$$\Gamma(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\tau}}{\tau(\tau+1)\cdots(\tau+n)}$$

e sostituendo $\Gamma(1-\tau)$ nella 1), possiamo scrivere:

$$F(\tau,z) = \frac{1}{z^{\tau}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\tau)(2-\tau)\cdots(n+1-\tau)}{n!}\cdot n^{\tau-1} =$$

$$= \frac{1}{z^{\tau}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\tau}{1}\cdot\frac{2-\tau}{2}\cdots\frac{n-\tau}{n}\cdot\frac{n+1-\tau}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot n^{\tau} = \frac{1}{z^{\tau}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{\tau}{k}\right)\right)\cdot n^{\tau}$$

perché il fattore $\frac{n+1}{n}$ è irrilevante per $n\to\infty$.

Osservando che un numero $n>1$ può essere espresso da: $n=\prod_{h=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h}\right)$,

la funzione $F(\tau,z)$ può essere successivamente modificata come segue:

$$F(\tau,z) = \frac{1}{z^{\tau}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{\tau}{k}\right)\right)\cdot\left(\prod_{h=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{\tau}\right) =$$

$$= e^{-\tau\cdot\ln z}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\tau}\cdot\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tau}{k}\right)\right)\cdot e^{\tau\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} =$$

$$= e^{-\tau\cdot\ln z}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\tau}\cdot\left(1-\frac{\tau}{n+1}\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tau}{k}\right)\cdot e^{\frac{\tau}{k}}\right)\cdot e^{-\tau\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)}$$

I quattro fattori sotto segno di limite convergono separatamente ed il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = c_e = 0,57721........$$

è detto costante di Eulero.

Allora sostituendo il prodotto dei limiti al limite del prodotto si ottiene:

$$F(\tau,z) = e^{-\tau\,(c_e+\ln z)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{\tau}{k}\right) e^{\frac{\tau}{k}} \qquad 2)$$

Da questa relazione non è difficile ricavare un'altra forma utile in seguito per $F(\tau,z)$.

Calcolando la derivata in rapporto a τ di:

$$\ln\{F(\tau,z)\} = -\tau\,(c_e+\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau}{k} + \ln\left(1-\frac{\tau}{k}\right)$$

si ha:

$$\frac{F_{,\tau}(\tau,z)}{F(\tau,z)} = -\,(c_e+\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{\tau}{k}}$$

da cui:

$$\frac{F_{,\tau}(\tau,z)}{F(\tau,z)} + c_e+\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{1-\frac{\tau}{k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{k}\right)^n\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{k}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{n+1} = -\frac{1}{\tau}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{n} =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\cdot\tau^{n}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{n}$$

La somma infinita : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{n} = \zeta(n)$

è nota come funzione zeta di Riemann e converge per $n \neq 1$.

Ne consegue che :

$$\frac{F_{,\tau}(\tau,z)}{F(\tau,z)} = -\left(c_e+\ln z+\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\cdot\tau^{n-1}\right)$$

Integrando questa equazione con la condizione iniziale $F(\tau,z) = 1$ per $\tau = 0$, che proviene dalla definizione 1), si giunge alla :

$$F(\tau,z) = e^{-\left((c_e+\ln z)\cdot\tau+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}\cdot\tau^{n}\right)} \qquad 3)$$

Come si è osservato prima, la 3) è valida sull'intero piano complesso compresi i valori di τ interi positivi in cui $F(\tau,z) = 0$, poiché per tali valori $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}\cdot\tau^{n}$

diverge; infatti essendo $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{n} = \zeta(n)$ si ha: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}\cdot\tau^{n} =$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{n}\tau^{n} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\tau}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{n} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau}{k} + \ln\left(1-\frac{\tau}{k}\right)$$

e quindi per ogni τ intero maggiore di 0 esiste un valore di k che introduce tra gli addendi dell'ultima sommatoria infinita un ln(0) che la fa divergere a $+\infty$, come già poteva essere osservato nella forma assunta da ln{F(τ,z)}.

Oltre ai valori nulli assunti per τ intero positivo, $F(\tau,z) \to 0$ per $\tau \to \infty$, poiché, come si vede dalla 3), insieme a τ diverge il contenuto della parentesi al suo esponente.

Ciò dimostra un parte della condizioni necessarie alla derivabilità sotto il segno di integrale per la formula 12) del testo, perché, cambiando τ in $-t$, alla condizione:

$$F(\tau,z) = \frac{z^{-\tau}}{\Gamma(1-\tau)} \to 0 \quad \text{per } \tau \to \infty \quad \text{corrisponde} \quad \frac{z^{t}}{\Gamma(t+1)} \to 0 \quad \text{per } t \to -\infty$$

Resta da dimostrare che $\frac{z^{t}}{\Gamma(t+1)} \to 0$ per $t \to +\infty$

Se h è un intero e $h+1 \le t < h+2$, e ricordando che $z > 1$, si ha:

$$0 < \frac{z^{t}}{\Gamma(t+1)} < \frac{z^{h+2}}{h!} = z^{2}\cdot\frac{z^{h}}{h!}$$ di cui è nota la convergenza a zero per $h \to +\infty$